

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА

А.А. Воронин, С.П. Мишин

**ОПТИМАЛЬНЫЕ
ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ**

Москва 2003

УДК 519
ББК 22.183.43 + 65в641
В75

Научный редактор: д.т.н., проф. *Д.А. Новиков*
Рецензент: д.т.н., проф. *А.Д. Цвиркун*

Воронин А.А., Мишин С.П.

В75 Оптимальные иерархические структуры. – М.: ИПУ
РАН, 2003. – 214 с.

ISBN 5-85534-699-4

В монографии рассматривается проблема синтеза оптимальной иерархической структуры как задача минимизации функционала на множестве ориентированных ациклических графов. Разработан понятийный, аналитический и алгоритмический аппарат, охватывающий широкий класс задач, допускающих различную содержательную интерпретацию.

В рамках предложенного подхода решена задача поиска структуры, минимизирующей затраты на управление организационной системой, а также построена модель структурных преобразований организации, позволившая количественно исследовать взаимосвязи между оптимальным числом иерархических уровней, скоростью изменения внешней среды и степенью развития организационных отношений.

Книга адресована специалистам в области математического моделирования и управления социально-экономическими системами, а также аспирантам и студентам ВУЗов.

Е-mail авторов: voronin@volsu.ru; smishin@newmail.ru

Содержание.

Предисловие.	6
Введение.	8
Глава I. Оптимальные иерархические структуры.	24
§1. Общая задача об оптимальной иерархии.....	24
1. Постановка задачи оптимизации.....	24
2. Звенья, субиерархии и слои.	25
3. Аддитивные и локальные функционалы.	28
4. Подчиненные группы. Структурная эквивалентность.....	31
5. Простые и структурные функционалы.	34
§2. Редукция общей задачи к задаче об оптимальной организации.	37
1. Графы организации.	37
2. Оптимальная организация набора групп.	40
3. Виды организаций.	42
4. Деревья организации.....	44
§3. Вид оптимальной организации для различных классов структурного функционала.....	45
1. Монотонные функционалы.....	45
2. Выпуклые и вогнутые функционалы.	48
3. Организации без повторяющихся групп.....	51
4. Существенно выпуклые функционалы.	53
Глава II. Общие методы оптимизации иерархических структур в частных задачах.	59
§1. Примеры задач поиска оптимальной структуры.....	59
1. Оптимальная организация технологического взаимодействия элементов.....	60
2. Оптимальное алфавитное кодирование.	65
3. Оптимальная структура управления сетью доставки материальных потоков.	70
4. Оптимальная структура управления однородными элементами.....	71
5. Задачи с неструктурным функционалом и сложными ограничениями.	74

§2. Примеры структурных функционалов стоимости.	76
1. Сложность группы. Свойства функционала стоимости. Примеры (функционалы (I)-(IV)).	76
2. Вид оптимальной организации для функционала (I).	80
3. Вид оптимальной организации для функционала (II).	84
4. Вид оптимальной организации для функционала (III).	88
5. Вид оптимальной организации для функционала (IV).	95
Глава III. Алгоритмы поиска оптимального дерева.....	100
§1. Точное решение задачи об оптимальном дереве.....	101
1. Оценка сложности общей задачи на $D(f)$. Переборный алгоритм.	101
2. Оценка сложности общей задачи на $D_r(f)$. Переборный алгоритм.	108
3. Оценка сложности задачи на $D(f)$ при функционале вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$. Алгоритм решения.....	112
4. Оценка сложности задачи на $D_r(f)$ при функционале вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$. Алгоритм решения.....	121
§2. Приближенное решение задачи об оптимальном дереве на $D(f)$	124
1. Эвристический алгоритм со сложностью порядка n^2 при функционале вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$	124
2. Эвристический алгоритм со сложностью порядка $n^2 \log n$ при функционале вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$	128
3. Первый эвристический алгоритм решения общей задачи.....	132
4. Второй эвристический алгоритм решения общей задачи.....	135
Глава IV. Алгоритмы поиска оптимальной последовательной организации.	142
§1. Алгоритм решения общей задачи.	143
1. Эквивалентность задач о поддереве минимального веса и об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации.	143
2. Нормализация графа задачи.....	147
3. Построение алгоритма. Оценка сложности.	150

§2. Оценка сложности задачи при функционале вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$. Алгоритм решения.....	155
1. NP -полнота задачи.....	155
2. Узловые группы.....	158
3. Модификация алгоритма для функционала вида $P(g_1 , \mathbf{K}, g_k , g)$. Оценка сложности.	162
Глава V. Модель управления структурными изменениями	
организационной системы.	168
§1. Стоимость реорганизации структуры.....	169
1. Стоимость реорганизации групп.....	170
2. Стоимость реорганизации наборов групп.	172
3. Стоимость реорганизации графов.....	175
4. Некоторые свойства стоимости реорганизации.	180
§2. Динамика структуры организационной системы.....	182
1. Определение структуры.....	182
2. Пример содержательной интерпретации понятия “внешняя среда”.....	183
3. Управление структурой.	185
4. l -усечения как пример простейших управлений структурой.....	188
§3. Исследование модели управления структурными изменениями.	192
1. Параметры динамики внешней среды.	193
2. Параметры затрат на функционирование и реорганизацию	194
3. Соотношение затрат на функционирование и реорганизацию при различном количестве уровней иерархии..	197
4. Оптимальное количество уровней иерархии при различных параметрах функционала и скоростях изменения внешней среды.	201
Заключение.....	207
Литература.....	210

Предисловие.

Любая достаточно сложная система, будь то естественная или искусственная, характеризуется иерархической структурой. Поэтому иерархии являются предметом исследований в самых разных областях науки – биологии, экономике, технике, управлении и др.

Действительно, взяв в руки любой учебник по менеджменту, можно найти в нем, как минимум, раздел или главу, посвященную описанию различных организационных структур. Но ни в одном из учебников нет конструктивных рекомендаций, позволяющих построить наилучшую структуру для конкретной организации. Обратившись к теории управления социально-экономическими системами, можно также констатировать, что детально исследованы двухуровневые системы, а относительно многоуровневых рекомендуется декомпозировать их на набор двухуровневых. Примеры можно продолжать и далее – в каждой предметной области имеется набор частных моделей с достаточно ограниченной сферой применения.

В чем же причина отсутствия адекватных запросам практики формальных моделей иерархических систем? Дело, наверное, в том, что на сегодняшний день математика не смогла предложить простой и универсальной модели, которая позволяла бы в рамках минимальных предположений сравнивать различные структуры и искать оптимальную иерархию. Существующие модели либо являются слишком частными и не могут претендовать на универсальность, либо не удовлетворяют критерию простоты потому, что возникающие в них задачи дискретной оптимизации обладают колоссальной вычислительной сложностью и не позволяют анализировать свойства оптимального решения в зависимости от исходных параметров.

В предлагаемой вниманию читателя монографии используется подход, удачно сочетающий “универсальность” и “простоту”. С одной стороны, постановка задачи об оптимальной иерархической структуре как задачи о поиске ориентированного ациклического графа, минимизирующего заданный функционал, охватывает множество частных задач как теории управления организационными системами, так и теории связи, теории массового обслуживания и др. (не говоря уже о том, что данная задача представляет интерес сама по себе – по крайней мере, для

специалистов по дискретной математике). С другой стороны, полученные результаты позволяют во многих случаях (выделяемых такими свойствами функционалов как выпуклость, вогнутость и др.) сразу указывать класс иерархий, содержащий в себе оптимальную. Чрезвычайно привлекательной выглядит также возможность постановки и решения некоторых задач оптимизации изменения структур – их динамики во времени.

Конечно, данная работа не содержит ответов на все вопросы. Она может рассматриваться, скорее, как демонстрация возможности и целесообразности создания, развития и применения единого подхода и формального аппарата оптимизации иерархических структур во многих предметных областях. Хочется надеяться, что результаты, полученные авторами, найдут дальнейшее развитие, в том числе – в работах их учеников и последователей.

Ответственный редактор – д.т.н.,
ведущий научный сотрудник лабора-
тории управления организационными
системами Института проблем
управления РАН Д.А. Новиков.

Введение.

Настоящая монография посвящена разработке общих методов синтеза оптимальных иерархических структур. Иерархические структуры используются при описании различных систем: технических, организационных и т. п. Структура организационных систем описывает взаимодействие людей в различных сферах деятельности. Поэтому проблема ее оптимизации представляет, на наш взгляд, особый интерес в связи с тем, что организационные системы подчиняются, с одной стороны, известному человеческому произволу, с другой – объективным общесистемным закономерностям.

Несмотря на большое количество работ по проблемам математического моделирования организационных систем (см. обзоры [8, 9, 35]), в настоящее время отсутствуют общие подходы к их исследованию (см., например, [21, 26]). Имеющиеся модели касаются, как правило, отдельных аспектов функционирования конкретных систем.

Обычно модели организационных систем включают в себя “поведение” отдельных элементов, подсистем и системы в целом, которое связано с некоторой целенаправленностью, математически формулируемой как задача оптимизации некоторой целевой функции [23]. В связи с этим, иерархичность структуры, то есть определенная соподчиненность элементов и подсистем, является важнейшим свойством организационной системы [41]. При этом отечественная практика последнего десятилетия особенно наглядно показывает влияние структуры на эффективность организации: при одной и той же технологической базе и рыночных условиях результат деятельности различных систем может быть прямо противоположным (от полной убыточности до вполне прибыльной деятельности). В то же время пока не создано единого методологического подхода к исследованию организационных систем как многоуровневых систем с иерархической структурой [26, 34].

Проблема синтеза иерархической структуры является, пожалуй, наименее разработанной. Общие проблемы исследования структуры организационных систем обсуждаются чаще всего лишь на качественном уровне, а количественные модели носят частный характер. Большинство их авторов описывают допустимые множества структур и критерии их выбора исходя из

содержательных интерпретаций. Поэтому в результате исследования вырабатываются более или менее обоснованные рекомендации по выбору той или иной “типовой” структуры для конкретной организации в конкретных условиях. С одной стороны, такой подход позволяет исследовать проблему выбора оптимальной структуры организационной системы как часть общей задачи управления, с другой – ограничивает полученные результаты рамками конкретной содержательной интерпретации. Кроме того, в подавляющем большинстве моделей [21, 37, 41] рассматриваются только древовидные структуры, тогда как структура многих, в особенности “больших”, систем имеет более сложный вид (например, имеет место множественное подчинение).

Таким образом, актуальная проблема поиска универсальных закономерностей строения организационных систем остается практически вне поля зрения. Это сдерживает развитие таких “динамических” направлений теории организационных систем, как устойчивость, самоорганизация, развитие, эволюция, освоенных классической динамикой.

В целях создания единого подхода к исследованию структурных закономерностей организационных систем актуальным представляется изучение иерархических структур общего вида (ориентированных ациклических графов) с произвольным функционалом. Именно такая цель ставится в настоящей работе. Сведение проблемы структурного синтеза к оптимизационной задаче общего вида позволяет представить как ее частные случаи достаточно широкий круг задач из различных предметных областей: организационных систем, теории кодирования, теории массового обслуживания и др.

Решение общей задачи об оптимальной иерархии позволило бы находить наилучшие в заданном смысле структуры организационных систем (максимизирующие эффективность, минимизирующие затраты на функционирование и т. п.). Такую задачу можно назвать задачей статической оптимизации. Однако, поскольку структура системы, очевидно, зависит от внешних условий, актуальной является и задача динамической оптимизации или, другими словами, задача оптимального управления структурой, то есть поиск оптимальной “траектории” в пространстве допустимых иерархических структур системы с учетом изменений внешней среды. В этом случае кроме

“статической” оптимальности структуры необходимо учитывать и “гибкость” ее перестроения при изменениях среды. Одна из частных задач динамической оптимизации формулируется как проблема выбора оптимального числа уровней иерархии в зависимости от внешних условий. Такая задача обсуждается в ряде работ (см., например, [44, 56]) на качественном уровне.

Таким образом, актуальным является создание математических моделей, позволяющих рассчитывать динамические характеристики структуры организационных систем. В работе предпринята попытка постановки и решения такой задачи в некоторых частных случаях.

Следует отметить, что задачи структурной динамики организационных систем естественным образом связаны с появившимся в последнее десятилетие интересом к проблеме “устойчивого развития”. В различных науках этот термин и сама проблема трактуется по-разному, однако, общее их содержание сводится, по существу, к задачам структурной динамики социоприродных систем: структурной устойчивости, механизмам и способам структурных преобразований, самоорганизации, управлению развитием и т.п. [11].

Авторы отдают себе отчет в том, что предлагаемый в настоящей работе оптимизационный подход не вскрывает в полной мере внутренних механизмов структурных преобразований организационных систем, и модели их структурной динамики должны включать в себя “активность” их структурных элементов, описываемую, например, теоретико-игровыми методами теории активных систем [6, 9, 36]. Однако, в настоящее время в теории активных систем в общем виде изучены лишь двухуровневые (веерные) системы (где структурные преобразования по определению исключены), а результаты по исследованию многоуровневых систем носят фрагментарный характер [34, 35]. Авторы надеются, что их результаты окажутся полезными при расширении моделей активных систем на иерархические структуры общего вида и создании на этой основе полноценных динамических моделей организационных систем.

Структура работы. Работа состоит из пяти глав. В главе I поставлена общая задача об оптимальной структуре (иерархии), проведена ее редукция к оптимизационной задаче на множестве

графов специального вида (графов организации) для так называемых структурных функционалов. Проведен содержательный анализ требования структурности. Постулируемые свойства функционала (например, выпуклость и вогнутость) позволили создать эффективный формализм, сводящий исследование оптимальных графов к исследованию указанных свойств функционала. В случае удовлетворения функционала этим свойствам задача синтеза оптимальной иерархии в одних случаях является решенной, в других – существенно упрощается. Следует подчеркнуть, что результаты главы I не зависят от возможных содержательных интерпретаций и касаются иерархической структуры как таковой.

В главе II различные частные задачи синтеза оптимальной иерархической структуры рассмотрены в контексте общих результатов главы I. Описан анализ частных задач общими методами. Приведены содержательные интерпретации общих свойств функционала, определенных в главе I. Рассмотрены различные примеры функционалов.

В главе III исследована сложность и построены алгоритмы поиска оптимальных деревьев. Как показано в главе I, именно древовидные структуры в ряде случаев будут оптимальными организациями. Кроме того, к задаче об оптимальном дереве сводится ряд задач, рассмотренных в главе II.

В главе IV исследована сложность задачи и построены алгоритмы поиска оптимальной “последовательной” организации. Как показано в главе I, такие структуры будут оптимальными для определенного класса функционалов.

В главе V рассмотрены возможные подходы к моделированию структурных изменений организационной системы и применению для этих целей разработанного аппарата. Для построения динамической модели введена метрика на множестве структур – стоимость реорганизации – и определен динамический критерий – суммарные затраты на функционирование и реорганизацию в течение конечного отрезка времени. Проведен анализ оптимальности различных эмпирически заданных управлений структурой системы в зависимости от параметров функционала и интенсивности изменений внешней среды. Для расчетов использован один из функционалов главы II, алгоритмы главы IV и общий аппарат главы I.

В работе принята двойная **нумерация** определений, лемм, утверждений, теорем, формул, рисунков и таблиц, то есть сначала указывается номер главы, затем через точку номер определения, леммы и т.п. в этой главе. Используются арабские цифры. Номера формул указываются в скобках. Исключение составляют введенные в главе II функционалы (I)-(IV), которые нумеруются римскими цифрами без указания номера главы (в связи с большим количеством ссылок).

Можно предложить несколько подходов к ознакомлению с материалом настоящей книги:

1. Линейный, заключающийся в последовательном прочтении всех пяти глав.

2. Для читателя, интересующегося в большей степени не самим математическим аппаратом, а его приложениями, рекомендуем начать чтение с §1 главы II, описывающего частные случаи рассматриваемой задачи, или с пунктов 3 и 4 §3 главы V, описывающих структурные изменения системы в нестабильной внешней среде.

3. Для читателя, интересующегося анализом сложности и алгоритмами решения дискретных задач, рекомендуем ознакомиться с основными определениями главы I и с главами III, IV, которые посвящены алгоритмам. Напротив, для читателя, не интересующегося алгоритмами, рекомендуем опустить при прочтении главы III и IV.

Приведенное ниже краткое содержание работы позволяет ознакомиться с материалом книги на уровне качественного обсуждения исследуемых задач и полученных результатов.

Краткое содержание работы.

В §1 главы I поставлена следующая общая задача оптимизации *иерархической структуры*: найти $\arg \min_{G \in \Omega} P(G)$, где

Ω – множество допустимых иерархических структур (иерархий) с заданным на нем функционалом $P : \Omega \rightarrow [0; +\infty)$, который мы в дальнейшем будем называть *функционалом стоимости*. Под иерархической структурой $G \in \Omega$ понимается ориентированный ациклический граф.

Введено понятие *аддитивности функционала*, означающее, что при произвольном разбиении иерархии на “верхнюю” и “нижнюю” часть стоимость иерархии складывается из стоимостей частей. Доказано, что функционал аддитивен тогда и только тогда, когда его можно представить в виде суммы стоимостей отдельных звеньев графа (каждое звено состоит из вершины-центра и непосредственно подчиненных ей вершин).

Введено понятие *простоты функционала*, которое означает аддитивность и равенство стоимостей структурно эквивалентных графов (одинаковых с точностью до переименования неначальных вершин, *начальная вершина* (вершина *нижнего уровня*) – вершина, в которую не входит ребер). Доказано, что в общем случае простота эквивалентна так называемому свойству *структурности функционала*: стоимость каждого звена зависит от групп (множеств) начальных вершин графа, подчиненных данному звену. Тем самым дается содержательная интерпретация требования структурности: если исследуемый функционал аддитивен и не зависит от переименования неначальных вершин, то он структурен.

Поставленная общая задача исследована при следующих ограничениях.

1. Изучаются лишь конечные графы¹.
2. Изучаются структурные функционалы².
3. Изучаются не все возможные множества графов, а некоторые их варианты³.

Таким образом, в работе описаны методы решения общей задачи об оптимальной иерархии при условии конечности графов, структурности функционала и ограничениях на множество графов.

В §2 главы I описана редукция общей задачи об оптимальной иерархии к задаче на множестве графов специального вида. *Графом организации (организацией)* над *множеством элементов N* назовем граф, в котором на нижнем уровне находятся элементы из N , подчиняющиеся управляющим вершинам последующих уровней, причем каждая управляющая

¹ Некоторые методы изучения бесконечных иерархий приведены в [16].

² Некоторые частные задачи, приведенные в главе II, описываются неструктурными функционалами и мотивируют актуальность их исследования.

³ Изучаемые варианты множеств определены ниже в §2.

вершина однозначно характеризуется *группой* (множеством) подчиненных ей *элементов*¹.

Доказано, что в случае структурного функционала решение задачи на некотором множестве графов организации даст решение и на исходном множестве Ω произвольных графов, причем множество элементов N будет соответствовать начальным вершинам графов из Ω . В дальнейшем рассматриваются только графы организации.

Введем понятие *графа организации заданного набора* $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ *групп* элементов ($f_i \subseteq N$), то есть графа, который содержит все группы набора. Множество таких графов обозначим через $O(\mathbf{f})$. Решением задачи на $O(\mathbf{f})$ будет граф, оптимальный среди графов организации, которые “управляют” группами элементов из $\mathbf{f}$.

Для $r \geq 2$ *r-организацией* назовем организацию, в которой каждая нена начальная вершина контролирует не более r непосредственно подчиненных ей вершин. *Последовательной организацией* назовем 2-организацию, каждая нена начальная вершина которой контролирует не более двух вершин, одна из которых – нижнего уровня. *Организацией без пересечений* назовем организацию, в которой любой вершине непосредственно подчинены вершины, контролирующие непересекающиеся группы. Через $O_r(\mathbf{f})$, $O_p(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ обозначим соответственно множество r -организаций, последовательных организаций, организаций без пересечений, r -организаций без пересечений, которые входят в $O(\mathbf{f})$, то есть управляют группами из набора $\mathbf{f}$.

Если набор $\mathbf{f} = \{f\}$ состоит из одной группы, то $\tilde{O}(f)$ будет множеством деревьев организации одной группы f . Через $D(f) = \tilde{O}(f)$ и $D_r(f) = \tilde{O}_r(f)$ обозначим соответственно *множество деревьев* и *r-деревьев* из $O(f)$. *Веерной*

¹ Для организационной системы под элементами можно понимать исполнителей (например, рабочих), находящихся на нижнем уровне иерархии. Вершины следующего уровня контролируют некоторые группы подчиненных им исполнителей, вершины более высоких уровней контролируют подчиненные группы и т.д. То есть организационная структура, по сути, задается множеством групп и отношением их подчинения. Оптимизационная задача решается на множестве таких графов (мы будем называть их организациями).

(двухуровневой) *организацией* назовем организацию, в которой каждая группа организуется непосредственно из составляющих ее элементов. Примеры видов организации приведены на рис. 1.4.

Решение задачи на объединении множеств $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $O_p(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ для различных наборов $\mathbf{f}$ получается после решения задачи на каждом из множеств по отдельности. С помощью таких объединений можно представить достаточно широкий класс множеств организаций. В дальнейшем в работе изучаются только вышеуказанные варианты множеств.

В §3 главы I найден вид оптимальной организации для различных классов структурного функционала, который на множестве графов организации выглядит следующим образом: $P(G) = \sum_{g \in V \setminus N_G} P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$, где $G = (V, E)$ – граф организации, N_G – множество начальных вершин G (элементов), $g_1, \mathbf{K}, g_k$ – подгруппы, непосредственно подчиненные управляющей вершине (группе) g .¹ Величина $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq 0$ определяет стоимость звена, управляющего набором групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$. То есть структурный функционал полностью определен, если величина $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ задана на всевозможных наборах групп.

Функционал назван *монотонным*, если его значение не убывает при расширении одной из подгрупп и при добавлении новой подгруппы. Функционал назван *выпуклым*, если при $k \geq 3$ вместо организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу g можно, не увеличивая стоимость, сначала организовать некоторые подгруппы из $g_1, \mathbf{K}, g_k$, а затем полученную группу организовать с оставшимися подгруппами из $g_1, \mathbf{K}, g_k$. Функционал назван *вогнутым*, если уменьшить стоимость таким образом нельзя. Выпуклый функционал назван *существенно выпуклым*, если при организации двух неэлементарных подгрупп можно из одной удалить произвольный элемент, а затем организовать его с

¹ Например, на рис. 2.2 слева управляющей вершине III (группе $g = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) непосредственно подчинены подгруппы $g_1 = \{1, 2, 3\}$, $g_2 = \{4, 5, 6\}$ и $g_3 = \{7\}$.

полученной группой, не увеличивая стоимости¹. Доказан ряд теорем о видах оптимальной организации.

По поводу организации произвольного набора групп $\mathbf{f}$ из доказанных теорем сделаны следующие основные выводы.

1. При выпуклом функционале 2-организация минимальной стоимости будет оптимальной (решения на $O_2(\mathbf{f})$ и $\tilde{O}_2(\mathbf{f})$ будут оптимальны соответственно на $O_r(\mathbf{f})$, $O(\mathbf{f})$ и $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$).

2. При существенно выпуклом функционале последовательная организация минимальной стоимости будет оптимальной (решение на $O_p(\mathbf{f})$ ² будет оптимально и на $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$).

По поводу организации одной группы f сделаны следующие основные выводы.

1. При монотонном функционале дерево минимальной стоимости также будет и оптимальной организацией (решения на $D(f)$ и $D_r(f)$ ³ будут оптимальны соответственно на $O(f)$ и $O_r(f)$).

2. При монотонном выпуклом функционале 2-дерево минимальной стоимости также будет и оптимальной организацией (решение на $D_2(f)$ будет оптимально на $D(f)$, $D_r(f)$, $O(f)$, $O_r(f)$).

3. При монотонном вогнутом функционале веерная организация будет оптимальна на $O(f)$ и $\tilde{O}(f)$.

В §1 главы II приведены примеры задач, являющихся частными случаями общей задачи об оптимальной иерархии. Часть из них описывается структурным функционалом стоимости, что позволяет применить полученные в работе общие методы. Вполне естественно, что для конкретных задач могут существовать более эффективные частные методы. Однако универсальность общих методов позволяет единообразно анализировать частные задачи “в первом приближении”, а затем при необходимости учитывать их специфику.

¹ Примеры функционалов, анализ их монотонности, выпуклости, вогнутости, существенной выпуклости, содержательные интерпретации выпуклости и вогнутости приведены в главе II.

² Алгоритмы поиска оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации описаны в главе IV.

³ Алгоритмы поиска оптимального на $D(f)$ и $D_r(f)$ дерева описаны в главе III.

В пункте 1 описана задача об оптимальной организации технологического взаимодействия элементов, которое задано с помощью технологического графа. Между вершинами графа (конечными исполнителями или элементарными операциями технологического процесса) идет обмен материалами, информацией, энергией и т. п., что описывается ребрами графа и соответствующими им векторами мощности потоков. Для организации взаимодействия необходимо создание управляющих центров, координирующих потоки между элементами некоторых групп. Управляющие центры следующего уровня координируют потоки между подчиненными группами и т.д. Затраты на управляющий центр описываются функцией затрат $K(\cdot)$ от суммарной мощности координируемых потоков. В результате получаем задачу об оптимальном на $D(f)$ дереве организации со структурным функционалом стоимости P , где $f = N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ – множество (группа) элементов технологического графа.

На рис. 2.2 приведены различные примеры надстройки организационного графа над технологическим. Слева приведен пример организации, в которой управляющий центр I координирует взаимодействие группы элементов $\{1,2,3\}$, центр II – группы $\{4,5,6\}$, центр III – взаимодействие групп $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$ и $\{7\}$. В центре приведен пример 2-организации, справа изображена веерная организация. Если потоки на ребрах технологического графа одномерны и $K(0) = 0$, то выпуклость/вогнутость функции затрат влечет соответственно выпуклость/вогнутость функционала P . Следовательно, в случае выпуклой функции затрат оптимальна 2-организация, в случае вогнутой – веерная организация, имеющие, соответственно, максимальное и минимальное число управляющих центров.

В пункте 2 доказано, что задача построения оптимального алфавитного кода при заданных вероятностях появления символов входного алфавита эквивалентна задаче об оптимальном r -дереве организации над этим алфавитом (r – число символов выходного алфавита), причем функционал стоимости структурен и имеет достаточно простой вид. Для него алгоритм Хаффмана позволяет решить задачу об оптимальном на $D_r(f)$ r -дереве за $n \log n$ операций, где n – число элементов (символов входного алфавита).

В пунктах 3-5 показано, что описанные в различных работах (см., например, [21, 37, 41]) задачи об оптимальной структуре управления сетью доставки материальных потоков, оптимальной структуре управления однородными элементами и некоторые другие представляют собой частные случаи задачи об оптимальном дереве организации. В одних случаях функционал структурен, в других – нет, что иллюстрирует необходимость дальнейшего обобщения развитых методов на неструктурные функционалы.

В §2 главы II определены так называемые *анонимные функционалы*, то есть структурные функционалы, которые зависят не от самих организуемых групп, а от некоторой их числовой характеристики, названной в работе “сложностью”. Исходя из анализа различных типов взаимодействия людей в группах, изучаемых на качественном уровне во многих работах (см., например, [47, 53, 55]), предложено несколько примеров функционалов (см. формулы (I)-(IV)). Каждый из них охарактеризован двумя параметрами¹.

Исследована монотонность, выпуклость, вогнутость, существенная выпуклость функционалов (I)-(IV) и на основе общих теорем главы I проанализирован вид соответствующих оптимальных организаций. Полученные результаты схематично представлены в виде карт параметров (см. рис. 2.5-2.8), в которых каждой области соответствует определенный вид оптимальной организации. В некоторых областях параметров функционалы не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми. Аналитическое решение задачи в этих областях на данный момент отсутствует. На рис. 3.2, 3.4, 3.5 приведены результаты применения алгоритмических методов, из которых можно сделать вывод, что в указанных областях зависимость вида оптимальной организации от параметров достаточно сложна.

В главе III рассмотрены методы поиска оптимальных на $D(f)$ и $D_r(f)$ деревьев организации одной группы f , $|f| = n$. **§1 главы III** посвящен точному решению задачи об оптимальном

¹ Например, содержательно можно считать, что один из параметров “отвечает” за типовую принадлежность организации, а другой – за ее индивидуальность.

дереве. Доказано, что для структурного функционала общего вида не существует полиномиальных по n алгоритмов, дающих точное решение на $D(f)$ и $D_r(f)$, причем погрешность любого полиномиального алгоритма может быть сколь угодно велика. Построены переборные алгоритмы экспоненциальной сложности.

Как показывает §1 главы II, существуют функционалы, для которых задача об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$ полиномиально разрешима. В связи с этим представляют интерес классы функционалов, для которых задача на $D_r(f)$ решается полиномиальным по n алгоритмом. Доказано, что такой класс образуют, например, функционалы вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, зависящие не от самих подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, организуемых в группу g , а лишь от их мощностей (числа элементов в группе). Для этого класса функционалов построен алгоритм решения задачи на $D_r(f)$ со сложностью не более n^r . Также построен алгоритм и проанализирована сложность решения задачи на $D(f)$. Однако вопрос о полиномиальности алгоритма на $D(f)$ открыт.

В связи с достаточно высокой сложностью точных алгоритмов решения задачи на $D(f)$ в §2 главы III построены эвристические алгоритмы меньшей сложности. В общем случае они дают сколь угодно большую погрешность, однако для некоторых функционалов обладают приемлемой точностью и могут быть использованы после предварительного тестирования.

Для структурного функционала общего вида построены два эвристических алгоритма, сложность которых значительно ниже сложности переборного алгоритма. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ построены эвристические алгоритмы со сложностью порядка n^2 и $n^2 \log n$.

Доказано, что для определенных классов функционалов эвристические алгоритмы дают точное решение. Вне этих классов необходимо тестирование “качества работы” алгоритма. Приведен пример такого тестирования. Сделаны эмпирические выводы о величине средней и максимальной погрешности, о нарастании погрешности при росте n . В результате тестирования можно сделать выводы о том, какой алгоритм предпочтительнее использовать для конкретного функционала. Кроме того, приведен

пример эмпирического анализа самого функционала на классе деревьев $D(f)$, из которого можно сделать выводы о том, насколько отличается стоимость деревьев, оптимальных на $D_2(f)$ и $O_p(f)$, от стоимости оптимального на $D(f)$ дерева, от стоимости веерной организации. То есть приведен пример анализа разброса стоимости различных деревьев. Полученные с помощью такого анализа результаты могут помочь в выявлении некоторых закономерностей функционала.

В главе IV рассмотрена задача поиска оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации произвольного набора групп $f = \{f_1, K, f_m\}$. Проанализирована сложность и построены алгоритмы ее решения для структурного функционала общего вида и для функционала вида $P(|g_1|, K, |g_k|, |g|)$, зависящего лишь от мощностей. Через $n = |f_1 \cup K \cup f_m|$ обозначено общее количество элементов, через m – количество групп в наборе f . Как показано в главе I, для существенно выпуклых функционалов построенные алгоритмы решают задачу и на множествах $O(f)$, $O_r(f)$, $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$.

В §1 главы IV показано, что для структурного функционала общего вида на оптимальность последовательной организации могут влиять порядка $n2^n$ значений функционала. Любой алгоритм должен вычислить такое количество значений. Доказано, что задача об оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации эквивалентна задаче поиска поддеревья некоторого графа H , которое имеет минимальный вес среди всех поддеревьев с заданным корнем и листьями. Построен алгоритм решения, сложность которого в худшем случае оценивается величиной $n2^n 3^m$. В среднем сложность алгоритма зависит от структуры пересечений групп набора f . Эмпирическое тестирование алгоритма на различных наборах показывает, что при $m, n \leq 15$ сложность остается приемлемой.

В §2 главы IV показано, что для функционала вида $P(|g_1|, K, |g_k|, |g|)$ необходимо вычислить лишь n значений

функционала, в отличие от $n2^n$ в общем случае. Доказано, что задача NP -полна, даже если мощности всех групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ не превосходят трех. Таким образом, не существует полиномиального по m алгоритма (если $P \neq NP$, то есть NP -полные задачи полиномиально неразрешимы). Построен алгоритм с линейной оценкой сложности по n и экспоненциальной оценкой сложности по m . От структуры пересечений групп набора $\mathbf{f}$ зависит сложность алгоритма в среднем, которая остается приемлемой при $m \leq 15$ и n в пределах десятков тысяч.

В главе V предложена одна из возможных постановок задачи динамического управления структурой организационной системы. Изменение внешних “условий существования” может приводить к изменению “задач” системы, то есть к изменению набора управляемых групп¹. Такие изменения приводят к необходимости решения последовательности “статических” задач оптимизации структуры. Однако, в этом случае кроме эффективности структуры необходимо учитывать и “гибкость” ее перестроения при изменениях среды. В данной главе предложена одна из возможных моделей количественного анализа проблемы оптимального баланса “статической” и “динамической” эффективности структуры организационной системы. Динамическая оптимизация напрямую связана и с проблемой выбора оптимального числа уровней иерархии в зависимости от внешних условий, которая обсуждается в большинстве работ (см., например, [44, 56]) лишь качественно.

Значение функционала интерпретируется как стоимость функционирования (затраты) системы с соответствующей структурой в течение единицы времени. Возможный способ выбора функционала на основе эмпирических данных рассмотрен в начале главы.

В §1 главы V, исходя из известных величин стоимости включения и исключения каждого из элементов в группу, с

¹ Под организационной системой здесь подразумевается совокупность элементов (исполнителей), из которых составляются управляемые группы, или же сами управляемые группы. Это не меняет постановок задач и полученных результатов, однако в случае второго определения следует говорить не только об изменении структуры организационной системы, но также и об изменении ее самой.

помощью решения ряда задач о назначении определена содержательно интерпретируемая метрика на множестве графов организации – *стоимость реорганизации*.

В §2 главы V описана динамическая модель структурных изменений. Считаем, что в течение каждой единицы времени структура системы должна представлять собой граф организации набора групп f , то есть организовывать взаимодействие исполнителей (элементов) в некоторых группах, заданных “внешней средой”. В следующей единице времени может появиться необходимость в организации новых групп, и наоборот, отпасть необходимость в старых группах (например, при изменении спроса на продукцию предприятия).

Управление структурой заключается в выборе графа организации нового набора групп. Формально *управление* определено как отображение текущей структуры и известной к настоящему моменту истории изменения внешней среды в новую структуру (структуру следующей единицы времени). *Критерий эффективности управления* – суммарные затраты на функционирование системы и на реструктуризацию (в смысле метрики §1) в течение конечного числа единиц времени.

Общая задача поиска оптимального управления на множестве всех возможных управлений организацией представляется крайне сложной. Однако, если задан набор эффективно вычисляемых управлений, то их сравнение может проводиться численно. В качестве набора управлений приведены так называемые *l-усечения*: на каждом шаге определяется структура, минимизирующая затраты на функционирование (оптимальная в статике), а затем она “усекается” так, чтобы число уровней иерархии (равное максимальной длине пути от “подчиненного” к “начальнику”) не превосходило l . При достаточно большом l такое управление минимизирует затраты на функционирование, при $l=1$ – затраты на реструктуризацию (определяет наиболее простую – веерную – структуру). Оптимальное управление позволяет выбрать число уровней иерархии, при котором затраты на функционирование (эффективность) и на реструктуризацию (устойчивость к внешним воздействиям) сбалансированы оптимальным образом (то есть доставляют минимум указанному выше критерию эффективности). Задача вычисления *l-усечений*

сводится к рассмотренной в предыдущих главах задаче об оптимальной (в статике) организации.

В §3 главы V проведено численное исследование модели управления структурными изменениями. Для моделирования использован функционал (I) (см. §2 гл. II). I -усечения строятся с помощью алгоритмов главы IV, то есть усекается оптимальная последовательная организация.

При моделировании строится, в частности, кривая зависимости оптимального количества уровней иерархии от интенсивности изменений внешней среды (от количества новых групп в единицу времени). Анализируется зависимость указанной кривой от параметра функционала, который содержательно может соответствовать степени развития “организационных отношений”. Проведенные расчеты подтверждают наблюдаемую на практике закономерность: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую (веерную) структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий (увеличивая число уровней иерархии). Качественно это соответствует тому, что в нестабильной внешней среде доминируют организационные системы с наиболее простой структурой за счет легкой приспособляемости, в стабильной же среде, наоборот, доминируют системы со сложной иерархической структурой за счет высокой эффективности. Кроме того, по мере увеличения параметра функционала b (развития “организационных отношений”) увеличивается оптимальное количество уровней иерархии (за счет высокой эффективности система успешно “противостоит” более сильным внешним изменениям, не допуская упрощения (“деградации”)).

Заключение содержит основные результаты и выводы, а также обсуждение перспективных направлений дальнейших исследований.

Глава I. Оптимальные иерархические структуры.

В данной главе рассматривается задача поиска структуры, которая минимизирует произвольный функционал на произвольном множестве иерархических структур – конечных ориентированных ациклических графов. В §1 анализируются ограничения на функционал. В §2 для так называемых структурных функционалов задача на произвольном множестве графов сводится к задаче на множестве графов определенного вида (графов организации). В §3 доказываются теоремы о видах оптимальной организации. Полученные результаты общего характера кратко изложены в конце главы и позволяют решать различные частные задачи, рассмотренные в последующих главах.

§1. Общая задача об оптимальной иерархии.

1. Постановка задачи оптимизации.

В общем виде задача оптимизации иерархической структуры может быть поставлена следующим образом: необходимо найти $\arg \min_{G \in \Omega} P(G)$, где Ω – множество иерархических структур (иерархий) с заданным на нем функционалом $P : \Omega \rightarrow [0; +\infty)$.

Условие $P : \Omega \rightarrow [0; +\infty)$ не ограничивает общности, так как любой функционал $P' : \Omega \rightarrow (-\infty; +\infty)$ можно привести к P с помощью монотонного преобразования области $(-\infty; +\infty)$ в область $[0; +\infty)$. В дальнейшем считаем P неотрицательным. Функционал P назовем функционалом стоимости.

Вышеуказанная задача является общей задачей оптимизации. В данной работе рассматривается оптимизация иерархических структур. Определим понятие иерархической структуры, ограничивая круг задач, исследуемых в работе.

Определение 1.1. Любая иерархическая структура $G \in \Omega$ представляет собой ориентированный ациклический граф¹.

То есть объект исследования – структура – представляет собой множество элементов с попарными связями между ними. Понятие иерархической структуры предполагает несимметричность связей (начальник – подчиненный) и невозможность циклического подчинения, то есть ориентированность графа и его ацикличность. В различных частных задачах ребрам графа могут приписываться скалярные или векторные веса, вершинам могут соответствовать какие-либо величины и т. п., но в соответствии с определением все эти характеристики мы относим к “правилам взаимодействия” элементов, считая что собственно структура описывается графом. Поставленную задачу назовем задачей об оптимальной иерархии.

Как в теоретическом, так и в прикладном аспекте большой интерес представляет изучение бесконечных иерархических структур. Например, конечные структуры с большим числом элементов можно изучать с помощью предельного случая – бесконечных структур. Некоторые варианты решения таких задач предложены в [16]. В данной работе мы ограничимся исследованием конечных структур. То есть далее любой граф $G \in \Omega$ считаем конечным, не оговаривая это специально. При этом само множество графов Ω может быть бесконечным.

2. Звенья, субиерархии и слои.

Определение 1.2. Будем говорить, что вершина $u \in V$ подчинена вершине $v \in V$ в графе $G = (V, E) \in \Omega$, если из u существует путь в v .² Также будем говорить, что вершина v управляет вершиной u .

¹ Под графом в данной работе подразумевается объект $G = (V, E)$, состоящий из множества вершин V и множества ребер E . Множество вершин имеет произвольную природу, а множество ребер является множеством пар вершин: $E \subseteq V \times V$.

² Вершина v подчинена самой себе, путь в данном случае состоит из одной вершины.

Определение 1.3. Для любой вершины $v \in V$ через $Q_G(v) = \{u : u \in V, (u, v) \in E\}$ обозначим множество вершин, из которых в графе $G = (V, E) \in \Omega$ идут ребра в v , а через $R_G(v) = \{u : u \in V, (v, u) \in E\}$ – множество вершин, в которые в графе G идут ребра из v .¹ Вершины из $Q_G(v)$ назовем непосредственно подчиненными вершине v .

Определение 1.4. Для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ множество вершин $v \in V$, для которых $R_G(v) = \emptyset$, обозначим через T_G , а множество вершин $v \in V$, для которых $Q_G(v) = \emptyset$, обозначим через N_G . Вершины из T_G назовем терминальными, а из N_G – начальными.

Определение 1.5. Для любой вершины $v \in V \setminus N_G$ графа $G = (V, E) \in \Omega$ звеном с вершиной v назовем граф $Z_G(v) = (\{v\} \cup Q_G(v), \{(u, v) : u \in Q_G(v)\})$.

Как следует из определения, звено $Z_G(v)$ представляет собой подграф G , который состоит из вершины v , непосредственно подчиненных ей вершин и ребер, соответствующих этим подчинениям.

Определение 1.6. Для любого графа $G \in \Omega$ и вершины $v \in T_G \setminus N_G$ назовем v -упрощением граф, полученный из G после удаления v и инцидентных ребер.

Содержательно v -упрощение представляет собой операцию, при которой удаляется терминальная неизолированная вершина и ребра, соответствующие ее связям с непосредственно подчиненными вершинами.

Определение 1.7. Субиерархией H графа $G \in \Omega$ назовем граф, полученный после некоторой последовательности

¹ Если из контекста ясно, о каком графе идет речь, то нижний индекс G будем опускать.

упрощений графа G .¹ Множество всех субиерархий графа G обозначим через $H(G)$. Вырожденной субиерархией назовем граф $H = (N_G, \emptyset)$, состоящий из изолированных начальных вершин графа G .

Содержательно субиерархия G представляет собой "нижнюю" часть G , полученную после последовательного удаления неизоллированных терминальных вершин. Сам граф G также считаем субиерархией². Вырожденная субиерархия представляет собой набор изолированных (несвязанных) вершин, то есть фактически иерархия (подчинение) отсутствует.

Определение 1.8. Для графа $G \in \Omega$ слоем G , соответствующим субиерархиям $H_1 = (V_1, E_1) \in H(G)$ и $H_2 = (V_2, E_2) \in H(G)$, $H_2 \subseteq H_1$,³ назовем граф $S = \bigcup_{v \in V_1 \setminus V_2} Z_G(v)$.⁴ Будем говорить, что субиерархия H_1 разбивается на H_2 и слой S . Множество всех слоев графа G обозначим через $S(G)$.

Любое звено является слоем. Для каждой субиерархии или слоя $D = (V, E)$ и любых вершин $u, v \in V$ можно определить подчиненность u и v , множества $Q_D(v)$, N_D , $R_D(v)$, T_D , звенья $Z_D(v)$, v -упрощение так же, как в определениях 1.2-1.6. Ниже будем пользоваться этими обозначениями. Для пояснения понятий субиерархии, слоя и звена рассмотрим пример.

Граф G , изображенный на рис. 1.1, является также и субиерархией, обозначим ее через $H_1 = G = (V_1, E_1)$. После удаления терминальной вершины 7 и инцидентных ей ребер $\{5, 7\}$, $\{6, 7\}$ (7-упрощения) получим субиерархию $H_2 = (V_2, E_2)$, которая обведена сплошным прямоугольником. Выполнено $H_2 \subseteq H_1$, следовательно субиерархиям H_1 и H_2 соответствует некоторый

¹ После упрощения могут появиться новые терминальные вершины, которые также могут упрощаться на следующих шагах последовательности перестроений, приводящей к субиерархии.

² В этом случае последовательность упрощений пуста.

³ Вложенность графов понимается в смысле вложенности множеств вершин и ребер.

⁴ Объединение графов понимается в смысле объединения множеств вершин и ребер.

слоем S_1 графа G . Имеем $V_1 \setminus V_2 = \{7\}$, следовательно слой S_1 совпадает со звеном $Z_G(7) = S_1 = (V_{S_1}, E_{S_1})$, где $V_{S_1} = \{5, 6, 7\}$, $E_{S_1} = \{\{5, 7\}, \{6, 7\}\}$. На рисунке слой S_1 выделен пунктирным прямоугольником. Граф G получается “надстройкой” слоя S_1 над субиерархией H_2 , то есть G разбивается на H_2 и S_1 .

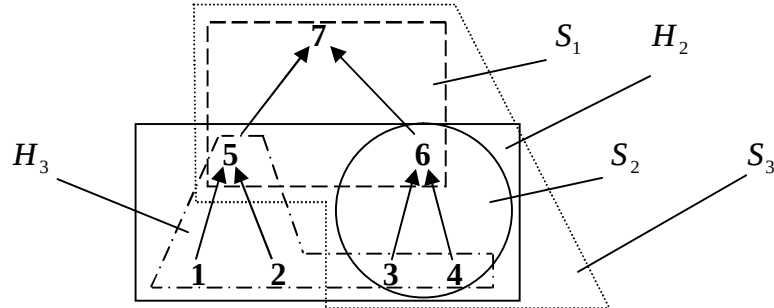


Рис. 1.1. Примеры субиерархий и слоев.

Если из H_2 удалить терминальную вершину 6 и инцидентные ребра $\{3, 6\}$, $\{4, 6\}$, то получим субиерархию H_3 графа G , которая обведена на рисунке пунктирно-точечной ломаной линией. Выполнено $H_3 \subseteq H_2$, следовательно субиерархиям H_2 и H_3 соответствует слой S_2 графа G , который обведен на рисунке кругом. Аналогично $H_3 \subseteq H_1$, следовательно граф S_3 , обведенный точечной ломаной линией, также является слоем.

3. Аддитивные и локальные функционалы.

Определение 1.9. Пополнением множества Ω назовем множество $\bar{\Omega} = \bigcup_{G \in \Omega} H(G)$. Множеством частей назовем множество $\overline{\bar{\Omega}} = \bigcup_{G \in \Omega} (H(G) \cup S(G))$.

Таким образом, пополнение $\bar{\Omega}$ строится путем добавления к Ω всевозможных субиерархий, а $\overline{\bar{\Omega}}$ – путем добавления всевозможных субиерархий и слоев.

Определение 1.10. Функционал P назовем аддитивным, если его можно продолжить на множество $\overline{\bar{\Omega}}$ $P: \overline{\bar{\Omega}} \rightarrow [0; +\infty)$ так, чтобы для любой субиерархии $G \in \bar{\Omega}$ и любого ее разбиения на

субиерархию H и слой S выполнялось равенство $P(G) = P(H) + P(S)$, и стоимость любой вырожденной субиерархии H_0 была нулевой: $P(H_0) = 0$.

Поясним определение аддитивности на примере. Для этого рассмотрим множество $\Omega = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, графы которого изображены на рис. 1.2. Граф G_2 отличается от G_1 тем, что добавлена вершина 7 и ей подчинены вершины 1 и 2. То есть G_2 разбивается на субиерархию G_1 и слой $Z_{G_2}(7)$. Аддитивность предполагает, что при этом к стоимости $P(G_1)$ должна быть добавлена некоторая величина $x = P(Z_{G_2}(7)) = P(G_2) - P(G_1)$ для получения $P(G_2)$. Аналогично при добавлении к G_1 слоя $Z_{G_3}(9)$ к $P(G_1)$ должна быть добавлена величина $y = P(Z_{G_3}(9)) = P(G_3) - P(G_1)$ для получения $P(G_3)$. При добавлении к G_1 слоев $Z_{G_2}(7)$ и $Z_{G_3}(9)$ получим граф G_4 . Соответственно, должно выполняться $P(G_4) = P(G_1) + x + y$. То есть, определив произвольным образом $P(G_1) \geq 0$, $P(G_2) \geq P(G_1)$, $P(G_3) \geq P(G_1)$, мы вынуждены положить $P(G_4) = P(G_2) + P(G_3) - P(G_1)$ для того, чтобы функционал был аддитивным.

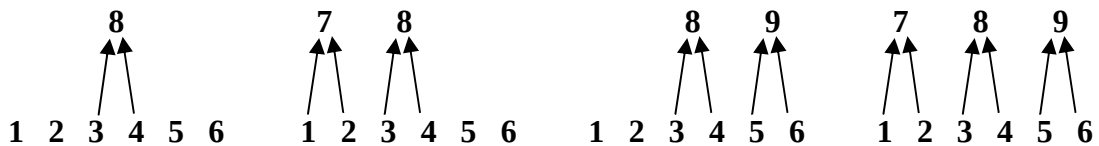


Рис. 1.2. Пример множества $\Omega = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$. Графы изображены слева направо.

Содержательно аддитивность означает, что при добавлении к графу “верхней части” (слоя) к стоимости добавляется величина, зависящая только от самой “верхней части”, а не от того, к какому графу она была добавлена. Если бы в вышеуказанном примере графы $Z_{G_2}(7)$ и $Z_{G_3}(9)$ принадлежали Ω , то на функционал налагались бы требования $P(G_2) = P(G_1) + P(Z_{G_2}(7))$, $P(G_3) = P(G_1) + P(Z_{G_3}(9))$, $P(G_4) = P(G_1) + P(Z_{G_2}(7)) + P(Z_{G_3}(9))$, достаточные для аддитивности, и продолжать P на $\overline{\Omega}$ было бы не нужно. Но так как Ω в общем случае не обладает “полнотой”, то

есть не содержит “общие части” (субиерархии и слои) своих графов, определять аддитивность необходимо через продолжение функционала. При аддитивном функционале стоимость вырожденной субиерархии (состоящей из изолированных вершин) должна быть нулевой.

Определение 1.11. Функционал P назовем локальным, если для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ выполнено $P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(Z_G(v))$,¹ где величина $P(Z_G(v)) \geq 0$ однозначно определяется своим аргументом – звеном – и не зависит от графа G , в который звено входит.

Таким образом, локальный функционал можно представить в виде суммы значений стоимости отдельных звеньев. Если $V \setminus N_G = \emptyset$, то пустую сумму считаем нулевой.

Теорема 1.1. Функционал стоимости аддитивен тогда и только тогда, когда он локален.

Доказательство. Докажем, что из аддитивности следует локальность. По определению аддитивности продолжим функционал P на $\overline{\Omega}$. Рассмотрим произвольную субиерархию $G = (V, E) \in \overline{\Omega}$ и неизолированную терминальную вершину $v \in T_G \setminus N_G$. Через H обозначим субиерархию, полученную из G после v -упрощения. Тогда G разбивается на H и слой $S = Z_G(v)$, следовательно $P(G) = P(H) + P(S)$ и $P(Z_G(v)) = P(S) = P(G) - P(H)$. Величина $P(Z_G(v)) = P(S) \geq 0$ определяется своим аргументом – звеном, а не графом, в который это звено входит. Имеем $P(G) = P(Z_G(v)) + P(H)$. Для H сделаем аналогичную операцию. И так далее. В итоге получим, что $P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(Z_G(v)) + P(H_0)$, где H_0 – вырожденная субиерархия. По определению аддитивности $P(H_0) = 0$.

Обратно, докажем, что из локальности следует аддитивность. Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E) \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Для любой

¹ Здесь и далее одной и той же буквой P обозначается как стоимость графов из Ω , так и стоимость отдельных звеньев, не входящих в Ω .

вершины $v \in V \setminus N_G$ определена величина $P(Z_G(v))$, так как звено $Z_G(v)$ входит по меньшей мере в один из графов Ω . Положим по определению $P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(Z_G(v))$. Докажем, что построенное продолжение функционала является искомым. Рассмотрим произвольную субиерархию $G = (V, E) \in \bar{\Omega}$ и ее разбиение на субиерархию $H = (V_H, E_H)$ и слой $S = (V_S, E_S)$. Рассмотрим вершину $v \in V \setminus N_G$. По определению 1.8, если $v \in V_H$, то $Z_G(v) \not\subset S$ ($v \notin V_S \setminus N_S$), иначе $Z_G(v) \subset S$ ($v \in V_S \setminus N_S$). Таким образом, каждое звено G входит либо в H , либо в S . Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(Z_G(v)) = \sum_{v \in V_H \setminus N_H} P(Z_H(v)) + \sum_{v \in V_S \setminus N_S} P(Z_S(v)) = P(S) + P(D)$$

Теорема доказана.

При доказательстве того, что из аддитивности следует локальность, равенство $P(G) = P(H) + P(S)$ (см. опр. 1.10) было использовано лишь для случая, когда S – звено, а не произвольный слой. Следовательно, такое определение аддитивности эквивалентно определению 1.10. Теорема 1.1 дает критерий возможности представления функционала в виде суммы стоимостей отдельных звеньев: при сложении частей стоимости должны складываться, стоимость вырожденных графов должна быть нулевой.

4. Подчиненные группы. Структурная эквивалентность.

Определение 1.12. Множеством элементов $N = \bigcup_{G \in \Omega} N_G$ назовем множество вершин, которые являются начальными хотя бы в одном из графов Ω .¹ Элементы будем обозначать через $a \in N$.

Определение 1.13. Множеством групп назовем множество F всевозможных непустых конечных подмножеств N . Группу g назовем элементарной, если она состоит из одного элемента:

¹ Множество элементов может быть бесконечным.

$g = \{a\}$, $a \in N$. Мощностью группы g назовем количество содержащихся в ней элементов $|g|$.

Определение 1.14. Для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ и любой вершины $v \in V$ множество начальных вершин, подчиненных v , обозначим через $g_G(v)$ и назовем подчиненной группой.

Выполнено $g_G(v) \subseteq N_G \subseteq N$, то есть $g_G(v) \in F$. Элементы можно интерпретировать как нижний уровень N_G графа G , над которым надстраивается структура управления – иерархия. Каждая вершина $v \in V$ управляет подчиненной группой элементов $g_G(v)$. Начальная вершина $v \in N_G$ управляет элементарной группой $g_G(v) = \{v\}$. Докажем вспомогательную лемму, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.1. Для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ и любой вершины $v \in V \setminus N_G$ выполнено $g_G(v) = g_G(v_1) \cup \mathbf{K} \cup g_G(v_k)$, где $Q_G(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$. Если вершина $v' \in V$ подчинена вершине $v'' \in V$, то $g_G(v') \subseteq g_G(v'')$.

Доказательство. Если для начальной вершины $u \in N_G$ выполнено $u \in g_G(v_i)$, то u подчинена v_i , а так как из v_i в v идет ребро, то u подчинена v , следовательно $u \in g_G(v)$. То есть $g_G(v_i) \subseteq g_G(v)$. Если $u \in g_G(v)$, то из u существует путь в v , который проходит хотя бы через одну из вершин v_i (только из этих вершин идут ребра в v), то есть u подчинена v_i , следовательно $u \in g_G(v_i)$. В итоге имеем $g_G(v) = g_G(v_1) \cup \mathbf{K} \cup g_G(v_k)$. Если начальная вершина u подчинена вершине v' , а та, в свою очередь, подчинена вершине v'' , то из u существует путь в v'' и $u \in g_G(v'')$. То есть $g_G(v') \subseteq g_G(v'')$. Лемма доказана.

Определение 1.15. Субиерархии или слои $D_1 = (V_1, E_1) \in \overline{\overline{\Omega}}$ и $D_2 = (V_2, E_2) \in \overline{\overline{\Omega}}$ назовем структурно эквивалентными, если для некоторых графов $G_1, G_2 \in \Omega$, таких что $D_1 \in H(G_1) \cup S(G_1)$, $D_2 \in H(G_2) \cup S(G_2)$, существует изоморфизм D_1 и D_2 ,

сохраняющий подчиненные группы. То есть существует взаимно однозначное отображение $l : V_1 \rightarrow V_2$, такое, что условие $(u, v) \in E_1$ эквивалентно условию $(l(u), l(v)) \in E_2$ и для любой вершины $u \in V_1$ выполнено $g_{G_1}(u) = g_{G_2}(l(u))$.

Поясним определение структурной эквивалентности на примере. Пусть иерархии $D_1 = G_1 \in \Omega$ и $D_2 = G_2 \in \Omega$ структурно эквивалентны. Рассмотрим начальную вершину $u \in N_{G_1}$. Ей в графе G_1 подчинена только она сама, то есть $g_{G_1}(u) = \{u\}$. Выполнено $l(u) \in N_{G_2}$, так как в соответствующие вершины должны входить соответствующие ребра, а в u ребер не входит. Имеем $g_{G_2}(l(u)) = \{l(u)\} = g_{G_1}(u) = \{u\}$, то есть $l(u) = u$. Итак, выполнено $N_{G_1} = N_{G_2}$, причем соответствие начальных вершин тождественно. Оставшиеся части графов G_1 и G_2 могут отличаться только “переименованием” вершин с сохранением структуры подчинения.

Рассмотрим графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 1.3. Выполнено $N_{G_1} = N_{G_2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, но G_1 и G_2 не являются структурно эквивалентными. Рассмотрим слои $D_1 = Z_{G_1}(9)$ и $D_2 = Z_{G_2}(14)$ графов G_1 и G_2 . D_1 и D_2 изоморфны: $l(7) = 12$, $l(8) = 13$, $l(9) = 14$. Вершинам 7 и 12 в графах G_1 и G_2 подчиняется одна и та же группа $g_{G_1}(7) = g_{G_2}(12) = \{1, 2, 3\}$. Аналогично $g_{G_1}(8) = g_{G_2}(13) = \{4, 5, 6\}$. Вершины 9 и 14 управляют одной и той же группой $g_{G_1}(9) = g_{G_2}(14) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с помощью управления одними и теми же непосредственно подчиненными подгруппами $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6\}$. Таким образом, нашлись графы G_1 и G_2 , в которых слои D_1 и D_2 имеют “одну и ту же структуру подчинения”, то есть структурно эквивалентны. Обозначим результат 9-упрощения G_1 через H_1 , 14-упрощения G_2 – через H_2 . Субиерархии H_1 и H_2 имеют “разные структуры подчинения”, то есть не являются структурно эквивалентными, что и приводит к отсутствию структурной эквивалентности G_1 и G_2 , несмотря на эквивалентность D_1 и D_2 .

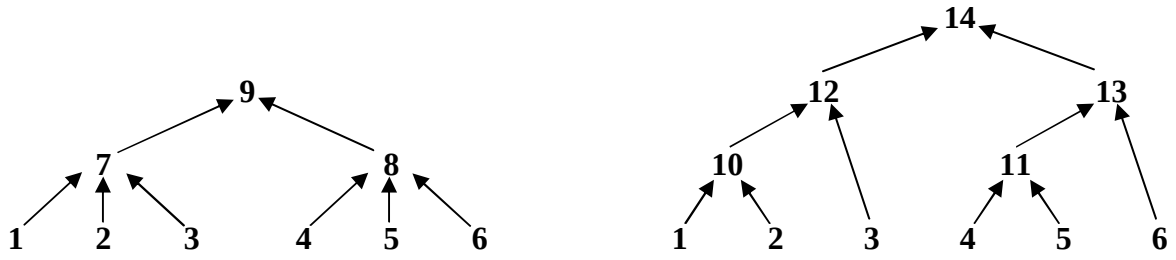


Рис. 1.3. Пример графов G_1, G_2 (слева направо).

5. Простые и структурные функционалы.

Определение 1.16. Функционал P назовем простым, если его можно аддитивно продолжить на множество $\overline{\overline{\Omega}}$ (см. опр. 1.10) так, чтобы для любых структурно эквивалентных графов $D_1, D_2 \in \overline{\overline{\Omega}}$ выполнялось $P(D_1) = P(D_2)$.

Таким образом, аддитивный функционал прост, если его значение одинаково для графов с “одинаковой структурой подчинения”. То есть “переименование” любых управляющих (неначальных) вершин графа не приводит к изменению стоимости, так как сохраняется структура подчинения начальных вершин.

Определение 1.17. Функционал P назовем структурным, если для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ выполнено $P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k))$,¹ где $Q_G(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$ и величина $P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k)) \geq 0$ однозначно определяется своим аргументов – набором групп² – и не зависит от графа G и порядка групп $g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k)$.

Теорема 1.2. Простой функционал стоимости структурен.

Доказательство. По определению простого функционала продолжим его на $\overline{\overline{\Omega}}$ и докажем структурность P . По теореме 1.1 P локален, следовательно для любого графа $G = (V, E) \in \Omega$ выполнено $P(G) = \sum_{v \in V \setminus N_G} P(Z_G(v))$. Рассмотрим $v \in V \setminus N_G$.

¹ Здесь и далее одной и той же буквой P обозначается как стоимость графов из Ω , так и стоимость наборов групп, что не приводит к путанице в силу различия аргументов функционалов.

² В наборе могут быть повторяющиеся группы.

Обозначим $Q_G(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$ и положим по определению $P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k)) = P(Z_G(v)) \geq 0$. Пусть для некоторого графа $G_1 = (V_1, E_1) \in \Omega$ и некоторой вершины $u \in V_1 \setminus N_{G_1}$ выполнено $Q_{G_1}(u) = \{u_1, \mathbf{K}, u_k\}$, $g_G(v_i) = g_{G_1}(u_i)$, $i = \overline{1, k}$. Тогда звенья $Z_G(v)$ и $Z_{G_1}(u)$ структурно эквивалентны: $l(v_i) = u_i$, $i = \overline{1, k}$, $l(v) = u$, по лемме 1.1 $g_G(v) = g_G(v_1) \cup \mathbf{K} \cup g_G(v_k) = g_{G_1}(u_1) \cup \mathbf{K} \cup g_{G_1}(u_k) = g_{G_1}(u) = g_{G_1}(l(v))$. В силу равенства $P(Z_G(v)) = P(Z_{G_1}(u))$ величина $P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k))$ определяется набором групп и не зависит от графа G . Изменение порядка записи вершин $v_1, \mathbf{K}, v_k$ никак не влияет на значение $P(Z_G(v))$, то есть $P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k))$ не зависит от порядка групп. Теорема доказана.

Определение 1.18. Множество Ω назовем вершинно определенным, если любой вершине v соответствует одна и та же подчиненная группа g в любом графе $G = (V, E) \in \Omega$, который содержит v : $v \in V$, $g_G(v) = g$.

Неформально выражаясь, множество Ω вершинно определено, если каждой вершине во всех графах подчинена одна и та же группа. Следующая теорема уточняет теорему 1.2 для вершинно определенных множеств Ω .

Теорема 1.3. На вершинно определенном множестве Ω функционал стоимости прост тогда и только тогда, когда он структурен.

Доказательство. Простота влечет за собой структурность на любом множестве Ω в силу теоремы 1.2. Докажем обратное для вершинно определенного множества. Предположим, что функционал структурен. Рассмотрим произвольный граф $D = (V, E) \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$ и некоторую вершину $v \in V \setminus N_D$. Пусть $Q_D(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$. В силу вершинной определенности подчиненные группы $g_G(v_1) = g(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k) = g(v_k)$ не зависят от того, в какие графы $G \in \Omega$ входит D . То есть величина $P(g_G(v_1), \mathbf{K}, g_G(v_k))$ (см. опр. 1.17) зависит только от $v_1, \mathbf{K}, v_k$, а

не от графа G . Если $Z_D(v) \notin \Omega$, то положим по определению $P(Z_D(v)) = P(g(v_1), \mathbf{K}, g(v_k))$. Тогда для всего графа D определим $P(D) = \sum_{v \in V \setminus N_D} P(Z_D(v))$. Аналогично доказательству теоремы 1.1 можно показать, что построенное продолжение функционала аддитивно (см. опр. 1.10). Рассмотрим структурно эквивалентные графы $D_1 = (V_1, E_1) \in \overline{\Omega}$ и $D_2 = (V_2, E_2) \in \overline{\Omega}$. Для $v \in V_1 \setminus N_{D_1}$, $Q_{D_1}(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$ выполнено $Q_{D_2}(l(v)) = \{l(v_1), \mathbf{K}, l(v_k)\}$. Кроме того, $g(v_i) = g(l(v_i))$, $i = \overline{1, k}$. То есть $P(Z_{D_1}(v)) = P(Z_{D_2}(l(v))) = P(g(v_1), \mathbf{K}, g(v_k))$. Таким образом, графы D_1 и D_2 разбиваются на пары соответствующих звеньев с одинаковой стоимостью. Следовательно, $P(D_1) = P(D_2)$. Теорема доказана.

Если множество Ω не является вершинно определенным, то найдется вершина v , которой в различных графах подчинены разные группы. Множество подчиненных групп имеет вид $\{g_G(v) : G = (V, E) \in \Omega, v \in V\}$. В этом случае можно перейти к множеству Ω' , в графах которого вместо вершины v будут присутствовать новые вершины, определяемые подчиненными группами: $\{v'_G = (v, g_G(v)) : G = (V, E) \in \Omega, v \in V\}$. Множество Ω' уже будет вершинно определенным. Если функционал структурен на Ω , то он, очевидно, структурен и на Ω' . Таким образом, по теореме 1.3 функционал прост на Ω' .

Для исследования класса простых функционалов достаточно исследовать класс структурных (см. теорему 1.2). Теорема 1.3 показывает, что изучение класса структурных функционалов также и необходимо, так как любой структурный функционал в общем случае может быть простым.

Данная работа посвящена исследованию структурных функционалов. Настоящий параграф позволяет содержательно интерпретировать требование структурности: если при “сложении частей” в иерархию их стоимости складываются, стоимость вырожденной иерархии нулевая и при замене (переименовании) управляющих (неначальных) вершин стоимость не меняется, то функционал прост и излагаемые ниже методы могут быть использованы для решения задачи об оптимальной иерархии.

Ниже (см. п.4 и п.5 §1 гл. II) приводятся примеры задач с неструктурным функционалом, что иллюстрирует необходимость изучения таких функционалов. Остальные примеры главы II показывают, что структурными функционалами описываются разнообразные задачи. Глава II в целом иллюстрирует применение полученных в работе общих методов исследования структурных функционалов для анализа частных задач.

§2. Редукция общей задачи к задаче об оптимальной организации.

1. Графы организации.

Определение 1.19. Ориентированный конечный ациклический граф $G = (V, E)$, в котором множество вершин V может содержать повторения, назовем графом организации над множеством элементов N , если выполнены следующие условия:

а) в вершинах графа находятся группы элементов, то есть для любой вершины $g \in V$ выполнено $g \in F$ (см. опр. 1.13);

б) для любой группы $g \in V \setminus N_G$ выполнено $g = \bigcup_{h \in Q_G(g)} h$, где через $Q_G(g) = \{h : h \in V, (h, g) \in E\}$ обозначено множество вершин графа G , из которых идут ребра в g ,¹ а через $N_G = \{g \in V : Q_G(g) = \emptyset\}$ обозначено множество начальных вершин G . Будем говорить, что группа $g \in V \setminus N_G$ организуется из подгрупп множества $Q_G(g)$.

с) Любая группа $g \in N_G$ элементарна. Множество N_G не содержит повторяющихся групп.

Все множество графов организации (организаций) над множеством элементов N обозначим через $O(N)$.

Для любой организации $G = (V, E) \in O(N)$ и любых групп $g, h \in V$ можно определить подчиненность g и h , множества $R_G(g)$, T_G , звенья $Z_G(g)$, g -упрощение так же, как в

¹ Множество $Q_G(g)$ может содержать повторяющиеся группы.

определениях 1.2-1.6. Ниже будем пользоваться этими обозначениями.

Лемма 1.2. Любой граф $G = (V, E) \in \Omega$ после замены всех вершин $v \in V$ на подчиненные им группы $g_G(v)$ ¹ становится графом организации над N .

Доказательство. Если $v \in N_G$, то вершине v подчинена только она сама, следовательно группа $g_G(v) = \{v\}$ элементарна. Вершины графа G не повторяются, следовательно после замены в начальных вершинах не будет повторяющихся групп. Рассмотрим вершину $v \in V \setminus N_G$. Пусть вершине v непосредственно подчинены вершины $v_1, \mathbf{K}, v_k$, то есть $Q_G(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$. Тогда по лемме 1.1 имеем $g_G(v) = g_G(v_1) \cup \mathbf{K} \cup g_G(v_k)$. Лемма доказана.

Определение 1.20. Отображение $O : \Omega \rightarrow O(N)$ определим как замену всех вершин графа $G \in \Omega$ подчиненными им группами. По лемме 1.2 O действительно отображает Ω в $O(N)$. Множество образов Ω обозначим через $O(\Omega) \subseteq O(N)$.

Лемма 1.3. Иерархии из Ω , переводящиеся отображением O в один граф, структурно эквивалентны и в случае структурного функционала имеют одинаковую стоимость.

Доказательство. Пусть графы G_1 и G_2 отображением O переводятся в один и тот же граф $D = (V_D, E_D) \in O(N)$. Рассмотрим вершину $g \in V_D$ и ее прообразы $v \in V_1$ и $u \in V_2$ в графах G_1 и G_2 . Положим по определению $l(v) = u$. У каждой группы $g \in V_D$ в графе G_1 один и только один прообраз (V_D может содержать повторяющиеся группы). То же касается и графа G_2 . Таким образом, l – взаимно однозначное соответствие V_1 и V_2 . Условие $(v', v'') \in E_1$ эквивалентно условию $(g_{G_1}(v'), g_{G_1}(v'')) \in E_D$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию $(l(v'), l(v'')) \in E_2$. То есть l – изоморфизм G_1 и G_2 . Кроме того, для любой $v \in V_1$

¹ При этом несколько вершин могут замениться на одинаковые группы, что приведет к появлению повторений во множестве вершин, а не к отождествлению совпадающих групп.

выполнено $g_{G_1}(v) = g_{G_2}(l(v))$, то есть G_1 и G_2 структурно эквивалентны.

Пусть функционал структурен. По определению 1.17 для графа $G_1 = (V_1, E_1) \in \Omega$ выполнено следующее равенство $P(G_1) = \sum_{v \in V_1 \setminus N_{G_1}} P(g_{G_1}(v_1), \mathbf{K}, g_{G_1}(v_k))$, где $Q_{G_1}(v) = \{v_1, \mathbf{K}, v_k\}$. Рассмотрим вершину $v \in V_1 \setminus N_{G_1}$. Тогда имеем $Q_{G_2}(l(v)) = \{l(v_1), \mathbf{K}, l(v_k)\}$ и выполнено $g_{G_1}(v_i) = g_{G_2}(l(v_i)) = g_i$, $i = \overline{1, k}$. Следовательно, и в $P(G_1)$, и в $P(G_2)$ присутствуют одни и те же слагаемые $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$, то есть $P(G_1) = P(G_2)$. Лемма доказана.

Определение 1.21. Определим функционал стоимости $P: O(N) \rightarrow [0; +\infty)$ на $O(N)$ следующим образом: для любого $G = (V, E) \in O(N)$ положим $P(G) = \sum_{g \in V \setminus N_G} P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$, где $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, величина $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq 0$ определена заданным на Ω структурным функционалом (см. опр. 1.17), в противном случае задана произвольно. Вместо $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ будем также использовать обозначение $P(Q_G(g))$.

Поясним определение. В зависимости от множества Ω величина $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ может быть определена не на всех наборах групп из F , а только на тех, которые встречаются в графах $O(\Omega)$. На остальных наборах определим $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq 0$ произвольным образом, так, чтобы величина $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ не изменялась при перестановках групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$.

Итак, считаем функционал структурным. Тогда прообразы любого графа организации структурно эквивалентны и имеют одинаковую стоимость (см. лемму 1.3). По определению 1.21 для любого графа $G \in \Omega$ выполнено $P(G) = P(O(G))$. То есть стоимость организации из $O(\Omega)$ и стоимости всех ее прообразов совпадают. Следовательно, для поиска оптимальной на Ω иерархической структуры достаточно найти оптимальную организацию на $O(\Omega) \subseteq O(N)$, после чего найти любой из ее

прообразов в Ω . Таким образом, задача об оптимальной иерархии трансформируется в задачу об оптимальной организации.

В дальнейшем в работе считается заданным функционал стоимости на $O(N)$ (см. опр. 1.21) и решается задача об оптимальной организации на различных подмножествах $O(N)$, что позволяет решать задачи об оптимальной иерархии на соответствующих множествах Ω для структурных функционалов.

2. Оптимальная организация набора групп.

Множество $O(N)$ содержит, в частности, вырожденные графы (то есть графы, состоящие из изолированных элементарных групп) нулевой стоимости. Поэтому решение задачи об оптимальной организации на всем множестве $O(N)$ тривиально.

В общем случае множество исследуемых организаций $O(\Omega)$ может иметь сколь угодно сложную структуру. В задачах, интересных с математической точки зрения, структура множества $O(\Omega)$ "достаточно проста" в том смысле, что для любого графа $G \in O(N)$ имеется "эффективный" алгоритм проверки условия $G \in O(\Omega)$.

Определение 1.22. Множество организаций, в которые входят группы $f_1, \mathbf{K}, f_m$,¹ обозначим через $O(f_1, \mathbf{K}, f_m)$ ² или $O(\mathbf{f})$, где $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Любую организацию из $O(\mathbf{f})$ назовем организацией групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$. Любую неначальную группу, отличную от $f_1, \mathbf{K}, f_m$, назовем промежуточной группой.

Содержательно условие $O(\Omega) = O(\mathbf{f})$ означает, что ставится задача поиска оптимальной организации среди тех, которые управляют группами элементов $f_1, \mathbf{K}, f_m$. Если в $O(\Omega)$ входят организации, управляющие хотя бы одним из наборов групп

¹ Подразумевается, что среди $f_1, \mathbf{K}, f_m$ нет повторяющихся групп.

² При $m=1$ $O(f)$ – множество организаций, содержащих группу f , а множество $O(N)$ – множество любых организаций над N . Буква N всегда будет использоваться для обозначения всего множества элементов, а f – для обозначения группы, чтобы избежать путаницы в случае $f = N$.

$\mathbf{f}^{(i)} = \{f_1^{(i)}, \mathbf{K}, f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1, s}$, то $O(\Omega) = O(\mathbf{f}^{(1)}) \cup \mathbf{K} \cup O(\mathbf{f}^{(s)})$ и задача об оптимальной организации на $O(\Omega)$ решается с помощью решения s задач на множествах $O(\mathbf{f}^{(i)})$.

Сужать множество $O(\mathbf{f})$ могут дополнительные ограничения на организации $G \in O(\mathbf{f})$. Некоторые из таких ограничений описаны ниже (см. опр. 1.23-1.25). С помощью объединений множеств $O(\mathbf{f})$ или их сужений для различных наборов групп $\mathbf{f}$ можно представить достаточно широкий класс множеств $O(\Omega) \subseteq O(N)$. Ниже в работе рассматриваются методы решения задачи об оптимальной организации на $O(\mathbf{f})$ и его сужениях. В некоторых случаях результаты могут модифицироваться для решения задач на других вариантах $O(\Omega)$.¹

Если некоторая организация групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ содержит терминальные вершины, отличные от $f_1, \mathbf{K}, f_m$, то они могут быть удалены вместе с инцидентными ребрами без увеличения стоимости. Если терминальная вершина f_i повторяется несколько раз, то повторяющиеся экземпляры также могут быть удалены.

Далее при решении задачи об оптимальной организации считаем, что множество $O(\mathbf{f})$ содержит только организации с неповторяющимися терминальными вершинами из набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ (следовательно все рассматриваемые организации содержат не более m терминальных вершин). Решение задачи об оптимальной организации на таком множестве будет решением и на исходном множестве.

Утверждение 1.1. Для любого графа $G = (V, E) \in O(\mathbf{f})$ выполнено $N_G = f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$.

Доказательство. Все терминальные вершины G содержатся среди групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Любая вершина $\{a\} \in N_G$ подчинена по крайней мере одной из терминальных вершин f_i , следовательно по лемме 1.1 $\{a\} \subseteq f_i$. В то же время для $a \in f_i$ выполнено $\{a\} \subseteq f_i \subseteq N_G$. То есть $N_G = f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$. Утверждение доказано.

¹ См. пункт 4 §1 главы II, сноски в главе III по поводу алгоритмов поиска деревьев с определенным числом уровней.

Так как задача об оптимальной организации решается на $O(\mathbf{f})$ или его подмножествах, то по утверждению 1.1 для всех исследуемых графов G выполнено $N_G = f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$. Таким образом, далее считаем, что $N = f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$, где $n = |f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m|$. Это не ограничивает общности, так как все остальные элементы и содержащие их группы не входят ни в один из рассматриваемых графов.

3. Виды организаций.

Определение 1.23. Для $r \geq 2$ r -организацией назовем граф $G = (V, E) \in O(N)$, для любой вершины $g \in V$ которого выполнено $|Q_G(g)| \leq r$. Через $O_r(\mathbf{f})$ обозначим множество r -организаций, входящих в $O(\mathbf{f})$.

Определение 1.24. Последовательной организацией назовем граф $G = (V, E) \in O(N)$, для любой вершины $g \in V \setminus N_G$ которого выполнено либо $|Q_G(g)| = 1$, либо $Q_G(g) = \{g_1, g_2\}$ и по крайней мере одна из групп g_1, g_2 элементарна. Через $O_p(\mathbf{f})$ обозначим множество последовательных организаций, входящих в $O(\mathbf{f})$.

Определение 1.25. Организацией без пересечений назовем граф $G = (V, E) \in O(N)$, для любой вершины $g \in V \setminus N_G$ которого выполнено $g_i \cap g_j = \emptyset$, где $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $1 \leq i < j \leq k$. Через $\tilde{O}(\mathbf{f})$ и $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ обозначим соответственно множество организаций без пересечений, входящих в $O(\mathbf{f})$ и в $O_r(\mathbf{f})$.

Определение 1.26. Веерной организацией групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ назовем организацию, которая содержит только группы $f_1, \mathbf{K}, f_m$ и неповторяющиеся элементарные группы $\{a\} \subseteq f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$, причем каждая группа $f_1, \mathbf{K}, f_m$ организуется из элементарных подгрупп.

Таким образом, в r -организации любая группа организуется не более чем из r подгрупп. В последовательной организации в каждую нена начальную вершину входит либо одно ребро, либо два, причем одно из них из элементарной группы. Любая последовательная организация является 2-организацией, поэтому выполнено $O_p(\mathbf{f}) \subseteq O_2(\mathbf{f})$. В организации без пересечений каждая группа организуется из непересекающихся подгрупп. Соответственно, в r -организации без пересечений каждая группа организуется не более, чем из r непересекающихся подгрупп. Верная организация единственна, в ней каждая группа $f_1, \mathbf{K}, f_m$ организуется непосредственно из элементов, входящих в группу.

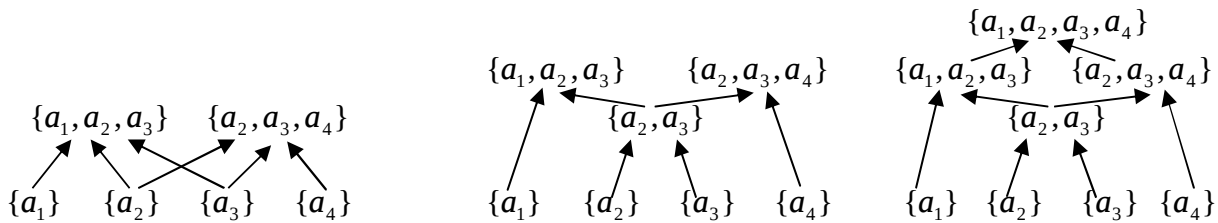


Рис. 1.4. Примеры графов организации.

Примеры организаций приведены на рис. 1.4. Слева изображена верная организация групп $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$, при которой элементы организуются в группы f_1 и f_2 без промежуточных групп. В центре приведен пример последовательной организации групп f_1 и f_2 . Элементы a_2 и a_3 организуются в промежуточную группу $\{a_2, a_3\}$, которая используется как для организации f_1 , так и для организации f_2 . Справа приведен пример 2-организации группы $f = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Здесь f организуется из двух пересекающихся промежуточных подгрупп.

Согласно замечанию, сделанному в пункте 2, $O(\mathbf{f})$ содержит только организации с неповторяющимися терминальными вершинами из набора $\mathbf{f}$. Соответственно, подмножества $O_r(\mathbf{f})$, $O_p(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ также содержат только такие графы. Аналогично пункту 2 можно показать, что решение задачи об оптимальной организации на $O_r(\mathbf{f})$, $O_p(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ будет решением и на соответствующих множествах с “лишними” терминальными вершинами.

4. Деревья организации.

Определение 1.27. Деревом организации группы f назовем организацию $G \in O(f)$, в которой из корня f не выходит ребер, из прочих вершин выходит ровно одно ребро¹. Множество деревьев организации группы f обозначим через $D(f)$, множество r -деревьев² организации группы f – через $D_r(f)$.

Утверждение 1.2. Организация одной группы f представляет собой дерево тогда и только тогда, когда f – единственная терминальная вершина и отсутствуют пересечения.

Доказательство. Пусть $G = (V, E) \in D(f)$. По определению дерева только из f не выходит ребер, следовательно f – единственная терминальная вершина. Предположим, что найдется группа $g \in V \setminus N_G$ и пересекающиеся подгруппы $g_1, g_2 \in Q_G(g)$. Рассмотрим начальную вершину $\{a\} \subseteq g_1 \cap g_2$. Вершина $\{a\}$ подчинена вершинам g_1 и g_2 , следовательно существуют два различных пути из $\{a\}$ в g (один проходит через g_1 , второй – через g_2). В некоторой вершине h эти пути расходятся, то есть из h выходит более одного ребра. Противоречие с определением дерева, следовательно G не содержит пересечений.

Обратное утверждение докажем индукцией по мощности f . Если $|f| = 1$, то есть $f = \{a\}$, то организация $G = (V, E)$ группы f состоит из некоторой цепи одинаковых групп $\{a\}$, поскольку иначе существовала бы отличная от f терминальная вершина. То есть G – дерево. Предположим, что утверждение доказано для всех групп f , мощность которых меньше q : $|f| < q$.

Пусть $|f| = q$ и f организуется в G из подгрупп $Q_G(f) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $g_i \cap g_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть G_i – подграф G , состоящий из g_i и подчиненных ей вершин (подмножеств g_i

¹ При рассмотрении ребер как неориентированных дерево представляет собой связный ациклический граф.

² Под r -деревом, $r \geq 2$ подразумевается дерево, в каждую вершину которого входит не более r ребер.

согласно лемме 1.1). Любая вершина $h \neq f$ принадлежит одному из подграфов G_i , так как f – единственная терминальная вершина. Если $g \in G_i$, $h \in G_j$, $i \neq j$, то $(g, h) \notin E$, так как иначе $g \subset g_i \cap g_j = \emptyset$. В G_i имеется единственная терминальная вершина g_i . По индуктивному предположению G_i – дерево с корнем в g_i . Следовательно, G состоит из вершины f , в которую идут ребра из корней k независимых деревьев, то есть G – дерево с корнем в f . Утверждение доказано.

Из утверждения 1.2 следует, что $D(f) = \tilde{O}(f)$ и $D_r(f) = \tilde{O}_r(f)$, то есть множество организаций одной группы f без пересечений и множество деревьев организации f совпадают. Таким образом, деревья представляют собой один из видов организации, определенных в пункте 3.

§3. Вид оптимальной организации для различных классов структурного функционала.

В данном параграфе определяются различные классы структурного функционала и доказываются теоремы о видах оптимальной организации. Выводы из доказанных теорем сделаны в конце главы I. Примеры функционалов, принадлежащих различным классам, приведены в главе II.

1. Монотонные функционалы.

Определение 1.28. Будем говорить, что набор групп Q_2 расширяет набор групп Q_1 ,¹ и писать $Q_1 \mathbf{p} Q_2$, если Q_2 получается из Q_1 после добавления новых групп и/или расширения имеющихся².

¹ В наборах могут быть повторяющиеся группы.

² Под расширением подразумевается добавление в группу элементов, которые в ней не содержатся.

Определение 1.29. Структурный функционал стоимости назовем монотонным, если для любых наборов $Q_1 \mathbf{p} Q_2$ выполнено неравенство $P(Q_1) \leq P(Q_2)$ (см. опр. 1.21).

Таким образом, если $Q_1 \mathbf{p} Q_2$, то группы из Q_1 вложены в некоторые группы из Q_2 . При монотонном функционале расширение набора групп не уменьшает стоимость.

Теорема 1.4. При монотонном функционале для любой организации $G = (V, E) \in O(f)$ группы f существует дерево $D \in D(f)$ не большей стоимости: $P(D) \leq P(G)$.

Доказательство. Если из всех вершин G , кроме f , выходит одно ребро, то искомое дерево найдено. Пусть $g \in V$, $|R_G(g)| > 1$, $h_1 \in R_G(g)$, $l_1 \in R_G(g)$, причем g не подчинена никакой вершине h , для которой $|R_G(h)| > 1$. Из h_1 и l_1 существуют пути в f (других терминальных вершин нет), то есть из g существуют два пути в f . Обозначим их отрезки до первого пересечения через $g - h_1 - h_2 - \mathbf{K} - h_{n_1}$, $g - l_1 - l_2 - \mathbf{K} - l_{n_2}$, где вершины h_{n_1} и l_{n_2} совпадают. По определению g из вершин $h_1, \mathbf{K}, h_{n_1-1}$, $l_1, \mathbf{K}, l_{n_2-1}$ выходит ровно одно ребро в следующую вершину пути. Рассмотрим два варианта перестроения графа G .

а) Выполнено $g = l_1$, то есть группа $g = l_1$ повторяется. Удалим вершину l_1 и входящие в нее ребра, заменив ребро (l_1, l_2) ребром (g, l_2) . В результате получим организацию G' группы f , $P(G') \leq P(G)$.

б) Выполнено $g \neq l_1$ ($g \subset l_1$). В этом случае в l_1 входят не менее двух ребер. Удалим ребро (g, l_1) . Группа l_1 изменится на $l'_1 = \bigcup_{l \in Q'(l'_1)} l$, где $Q'(l'_1) = Q(l_1) \setminus \{g\}$.¹ Выполнено $l'_1 \subseteq l_1$ и $(l_1 \setminus l'_1) \subseteq g$. Из l_1 выходило только одно ребро в l_2 . Изменение l_1 приведет к появлению в $Q(l_2)$ группы l'_1 вместо l_1 . То есть l_2 изменится на $l'_2 = \bigcup_{l \in Q'(l'_2)} l$, где $Q'(l'_2) = (Q(l_2) \setminus \{l_1\}) \cup \{l'_1\}$,¹ причем выполнено $l'_2 \subseteq l_2$ и $(l_2 \setminus l'_2) \subseteq g$. Аналогично группа l_i

¹ Новая группа может уже присутствовать в графе. В этом случае одинаковые группы не отождествляются, а во множестве вершин появляется повторение.

изменится на l'_i , $l'_i \subseteq l_i$, $(l_i \setminus l'_i) \subseteq g$, $i = \overline{3, n_2 - 1}$. $Q(l_{n_2})$ изменится на $Q'(l'_{n_2}) = (Q(l_{n_2}) \setminus \{l_{n_2-1}\}) \cup \{l'_{n_2-1}\}$. По лемме 1.1, так как g подчинена вершине h_{n_1-1} , выполнено $(l_{n_2-1} \setminus l'_{n_2-1}) \subseteq g \subseteq h_{n_1-1} \in Q'(l'_{n_2})$. Следовательно, $l_{n_2} = \bigcup_{l \in Q(l_{n_2})} l = \bigcup_{l' \in Q'(l'_{n_2})} l' = l'_{n_2}$, то есть группа l_{n_2} не изменится. В итоге удаление ребра (g, l_1) могло повлиять только на группы $l_1, \mathbf{K}, l_{n_2}$, причем $Q'(l'_i) \mathbf{p} Q(l_i)$, $i = \overline{1, n_2}$. В результате получили организацию G' группы f . В силу монотонности функционала $P(Q'(l'_i)) \leq P(Q(l_i))$, следовательно $P(G') \leq P(G)$.

Если выполнено условие б) и $l'_1 = l_1$, то G' отличается от G лишь удаленным ребром (g, l_1) . В этом случае, удалив при необходимости отличные от f терминальные вершины без увеличения стоимости, можно продолжить аналогичные удаления ребер. Если при этом не придем к искомому дереву, то либо выполнится условие а), либо условие б), в котором $l'_1 \subset l_1$. В обоих случаях сумма мощностей всех вершин G' меньше, чем аналогичная сумма для G , так как в случае а) удаляется l_1 , а в случае б) $|l'_1| < |l_1|$, $|l'_i| \leq |l_i|$ для $i = \overline{2, n_2}$. При необходимости, не увеличивая стоимости, удалим из G' “лишние” терминальные вершины так, чтобы осталась одна терминальная вершина f .

Если G' – не дерево, то сделаем вышеуказанные действия с G' вместо G . В результате либо получим искомое дерево, либо снова уменьшим сумму мощностей вершин в организации группы f . Данная сумма конечна, следовательно после конечного числа перестроений получим дерево организации группы f , стоимость которого не больше, чем стоимость исходной организации G . Теорема доказана.

Следствие. При монотонном функционале для любой r -организации $G \in O_r(f)$ группы f существует r -дерево $D \in D_r(f)$ не большей стоимости: $P(D) \leq P(G)$.

Доказательство. В каждую вершину r -организации G входит не более r ребер. При перестроениях в доказательстве теоремы 1.4 удаление ребер может лишь уменьшить число

входящих в вершину ребер. Удаление вершин не изменяет количество ребер, входящих в оставшиеся вершины. В результате приходим к r -дереву. Следствие доказано.

2. Выпуклые и вогнутые функционалы.

Определение 1.30. Структурный функционал стоимости назовем выпуклым¹, если для любого набора групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \geq 3$ существует разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$,² $1 < i < k$, для которого выполнено неравенство:

$$\text{а) } P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq P(h_1, \mathbf{K}, h_i) + P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k),$$

где $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$. Структурный функционал назовем вогнутым, если не существует разбиения, для которого неравенство а) выполнено строго, то есть для любого разбиения выполнено обратное неравенство:

$$\text{б) } P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \leq P(h_1, \mathbf{K}, h_i) + P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k).$$

При выпуклом функционале вместо организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ можно, не увеличивая стоимость, сначала организовать некоторые подгруппы из $g_1, \mathbf{K}, g_k$, а затем полученную группу h организовать с оставшимися подгруппами из $g_1, \mathbf{K}, g_k$. При вогнутом функционале уменьшить стоимость таким образом нельзя. Определим выпуклость/вогнутость на некотором множестве наборов (частичную выпуклость/вогнутость) следующим образом.

Определение 1.31. Пусть задано некоторое множество наборов групп. Если для любого набора множества выполнено неравенство а) определения 1.30, то функционал P назовем выпуклым на данном множестве наборов, если неравенство б) – вогнутым.

¹ Пример соответствия выпуклости и вогнутости функционала “классическому” определению выпуклой и вогнутой функции приведен в пункте 1 §1 главы II.

² То есть каждая из групп набора $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ принадлежит либо поднабору $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$, либо поднабору $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$. В наборе $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ могут присутствовать повторяющиеся группы.

В дальнейшем будет использовано понятие выпуклости и вогнутости на наборах попарно непересекающихся групп.

Теорема 1.5. При выпуклом функционале для любой организации $G = (V, E) \in O(f)$ набора групп f существует 2-организация $G_2 \in O_2(f)$ не большей стоимости: $P(G_2) \leq P(G)$.

Доказательство. Пусть $k = \max_{g \in V} |Q_G(g)|$. Если $k \leq 2$, то найдена искомая 2-организация. Пусть $k \geq 3$. Найдется $g \in V$, для которой $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$. В силу выпуклости функционала существует разбиение набора $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$, для которого $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \geq P(h_1, \mathbf{K}, h_i) + P(h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k)$, $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$, $1 < i < k$. Добавим в G вершину h ,¹ организовав ее из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_i$. Изменим входящие в g ребра так, чтобы она организовывалась из подгрупп $h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k$. При $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\} = \{g_1, \mathbf{K}, g_i\}$ перестроение изображено на рис. 1.5. Получим организацию $G' \in O(f)$, причем $P(G') \leq P(G)$. Имеем $|Q_{G'}(g)| = k - i + 1 < k$, $|Q_{G'}(h)| = i < k$. То есть в h и g входит менее k ребер. Число вершин, в которые входит k ребер, уменьшилось на единицу. Прodelывая аналогичные перестроения, получим в итоге организацию G' , для которой $k' = \max_{g \in V} |Q_{G'}(g)| < k$ и $P(G') \leq P(G)$. Если $k' > 2$, то повторим рассуждения. В результате придем к искомой 2-организации. Теорема доказана.



Рис. 1.5. Перестроение графа при выпуклом функционале.

Следствие 1. При выпуклом на наборах непересекающихся групп функционале для любой организации без пересечений $G = (V, E) \in \tilde{O}(f)$ набора групп f существует 2-организация без пересечений $G_2 \in \tilde{O}_2(f)$ не большей стоимости: $P(G_2) \leq P(G)$.

¹ Если группа, равная h , уже присутствует в графе, то одинаковые группы не отождествляются, а во множестве вершин появляется повторение.

Доказательство. Возьмем G в качестве начального графа при доказательстве теоремы 1.5. Для любой вершины $g \in V$ набор $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ не содержит пересекающихся групп. Следовательно, для перестроения G достаточно выпуклости на наборах непересекающихся групп. После перестроения получим организацию $G' \in \tilde{O}(f)$, которая также не содержит пересечений, что позволяет продолжить рассуждения. Следствие доказано.

Следствие 2. При выпуклом на наборах непересекающихся групп монотонном функционале для любой организации $G \in O(f)$ группы f существует 2-дерево $D_2 \in D_2(f)$ не большей стоимости: $P(D_2) \leq P(G)$.

Доказательство. По теореме 1.4 существует дерево организации $D \in D(f)$, для которого $P(D) \leq P(G)$. По следствию 1 существует 2-организация без пересечений $G_2 \in \tilde{O}(f)$, для которой $P(G_2) \leq P(D)$. По утверждению 1.2 G_2 – искомое 2-дерево D_2 . Следствие доказано.

Теорема 1.6. При вогнутом на наборах непересекающихся групп монотонном функционале всеерная организация одной группы f оптимальна на $O(f)$.

Доказательство. Пусть $G \in O(f)$ – организация, оптимальная на $O(f)$. По теореме 1.4 существует дерево $D = (V, E) \in D(f)$, $P(D) \leq P(G)$. То есть $P(D) = P(G)$ и дерево D оптимально на $O(f)$. Если $V = \{f\} \cup N_G$, то D – всеерная организация. В противном случае рассмотрим промежуточную группу $g \in V \setminus (\{f\} \cup N_G)$. Пусть $Q_D(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_{k_1}\}$. Из g выходит ровно одно ребро в некоторую вершину h . Пусть $Q_D(h) = \{g, h_1, \mathbf{K}, h_{k_2}\}$. По утверждению 1.2 в наборах $Q_D(g)$ и $Q_D(h)$ нет пересекающихся групп. Учитывая $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_{k_1}$, получим, что пересекающиеся группы отсутствуют и в наборе $Q'(h) = \{g_1, \mathbf{K}, g_{k_1}, h_1, \mathbf{K}, h_{k_2}\}$. То есть на данном наборе функционал вогнут, следовательно $P(g_1, \mathbf{K}, g_{k_1}, h_1, \mathbf{K}, h_{k_2}) \leq P(g_1, \mathbf{K}, g_{k_1}) + P(g, h_1, \mathbf{K}, h_{k_2})$. Удалим g , а h организуем из набора подгрупп $Q'(h)$ (см. рис. 1.6).

Получим оптимальное дерево организации группы f , которое содержит на одну промежуточную вершину меньше, чем G . Продолжая такие действия, докажем оптимальность веерной организации одной группы. Теорема доказана.



Рис. 1.6. Перестроение оптимального дерева при вогнутом функционале.

Следствие. При вогнутом на наборах непересекающихся групп функционале веерная организация одной группы f оптимальна на $\tilde{O}(f)$.

Доказательство. По утверждению 1.2 $\tilde{O}(f) = D(f)$. Таким образом, оптимальная на $\tilde{O}(f)$ организация будет деревом. Его можно использовать в качестве дерева D в доказательстве теоремы 1.6. При этом монотонность функционала не потребуется. Следствие доказано.

3. Организации без повторяющихся групп.

Теорема 1.7. Для каждого из множеств $O_2(f)$, $O_p(f)$, $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$, а при монотонном функционале и для множеств $O(f)$, $O_r(f)$, существует организация без повторяющихся групп, оптимальная на данном множестве.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – организация, оптимальная на одном из вышеперечисленных множеств. Предположим, что группа $g \in V$ встречается в G два или более раз. Обозначим экземпляр g , который не подчинен никаким другим экземплярам, через g' (он существует, так как граф ациклический), а некоторый другой экземпляр – через g'' .

Рассмотрим ребро (g', h) . Выполнено $g' \in Q_G(h)$. Если $G \in \tilde{O}(f)$ или $G \in \tilde{O}_r(f)$, то $g'' \notin Q_G(h)$, иначе в графе G нашлось бы пересечение. Если $G \in O_2(f)$ или $G \in O_p(f)$, то $g'' \notin Q_G(h)$, иначе выполнялось бы $Q_G(h) = \{g', g''\}$, $h = g' \cup g'' = g$, то есть

группа g' была бы подчинена еще одному экземпляру g , что противоречит определению g' . Если функционал монотонен, $G \in O(f)$ или $G \in O_r(f)$, то при $g'' \in Q_G(h)$ удалим ребро (g'', h) , получим оптимальную организацию, принадлежащую тому же множеству, что и G . В результате во всех случаях $(g'', h) \notin E$. Удалим ребро (g', h) и добавим ребро (g'', h) , то есть перенесем начало ребра из g' в g'' . По определению $g' \cap h \neq g''$, то есть при перестроении не образуется петель (циклов). После изменения ребра множество $Q_G(h)$ не изменилось, так как вместо группы g' в набор $Q_G(h)$ вошла точно такая же группа g'' . Получили оптимальную организацию, принадлежащую тому же множеству, что и G .

Продолжая удалять ребра вида (g', h) , придем к организации, в которой вершина g' – терминальная. Удалим ее и инцидентные ребра. При этом все группы из набора f останутся в графе (мы удалили повторяющуюся группу), стоимость не возрастет. Получили оптимальную на соответствующем множестве организацию, число экземпляров g в которой уменьшилось на единицу. Продолжая аналогичные действия, в итоге получим организацию без повторений g . Для остальных повторяющихся групп проделываем то же самое, что и для g . Получим оптимальную организацию без повторяющихся групп. Теорема доказана.

Лемма 1.4. Если организация $G = (V, E)$ не содержит повторяющихся групп, то для любой вершины $g \in V \setminus N_G$ выполнено $|Q_G(g)| \geq 2$; любая подгруппа $h \in Q_G(g)$ вложена в g собственным образом: $h \subset g$; все элементарные вершины $\{a\} \in V$ являются начальными: $\{a\} \in N_G$.

Доказательство. Выполнено $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$, где $Q_G(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$. При $k=1$ $g = g_1$, то есть группы повторяются, следовательно $k \geq 2$. Для любого $i = \overline{1, k}$ выполнено $g_i \subseteq g$. Если $g_i = g$, то группы повторяются, следовательно $g_i \subset g$. В элементарную группу $\{a\}$ могут входить ребра только из таких же

групп. Так как повторения отсутствуют, то в $\{a\}$ ребер не входит, то есть $\{a\} \in N_G$. Лемма доказана.

4. Существенно выпуклые функционалы.

Определение 1.32. Структурный функционал стоимости назовем существенно выпуклым, если он выпуклый и для любого набора неэлементарных групп $\{g_1, g_2\}$ выполнено по крайней мере одно из двух условий:

- а) для любого $a \in g_1$: $P(g_1, g_2) \geq P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) + P((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2, \{a\})$,
- б) для любого $a \in g_2$: $P(g_1, g_2) \geq P(g_1, g_2 \setminus \{a\}) + P(g_1 \cup (g_2 \setminus \{a\}), \{a\})$.

То есть функционал существенно выпуклый, если при организации двух неэлементарных подгрупп можно из одной удалить произвольный элемент, а затем организовать его с полученной группой, не увеличивая стоимости.

Теорема 1.8. При существенно выпуклом функционале для любой организации $G \in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f}$ существует последовательная организация $G_p \in O_p(\mathbf{f})$ не большей стоимости: $P(G_p) \leq P(G)$.

Доказательство. По теореме 1.5 существует 2-организация $G'_2 \in O_2(\mathbf{f})$, $P(G'_2) \leq P(G)$. По теореме 1.7 существует 2-организация без повторяющихся групп $G_2 = (V, E) \in O_2(\mathbf{f})$, $P(G_2) \leq P(G'_2) \leq P(G)$. По лемме 1.4 для $g \in V \setminus N_{G_2}$ выполнено $|Q_{G_2}(g)| = 2$. Назовем вершину g графа G_2 неправильной, если она организуется из двух неэлементарных подгрупп. В противном случае назовем ее правильной. Если в графе G_2 нет неправильных вершин, то G_2 – последовательная организация (см. опр. 1.24).

Пусть g – такая неправильная вершина, все подчиненные вершины которой правильны. Пусть $Q_{G_2}(g) = \{g_1, g_2\}$. Тогда g_1 и g_2 – неэлементарные правильные вершины, и, следовательно, $Q_{G_2}(g_1) = \{g_1 \setminus \{a'\}, \{a'\}\}$, $Q_{G_2}(g_2) = \{g_2 \setminus \{a''\}, \{a''\}\}$.

Функционал – существенно выпуклый. Пусть выполнено условие а) определения 1.32. Добавим вершину

$g_3 = (g_1 \setminus \{a'\}) \cup g_2$,¹ организовав ее из $g_1 \setminus \{a'\}$ и g_2 . После этого организуем g из $\{a'\}$ и g_3 (см. рис. 1.7). Получим 2-организацию G' . В силу $P(g_1, g_2) \geq P(g_1 \setminus \{a'\}, g_2) + P(g_3, \{a'\})$ имеем $P(G') \leq P(G_2)$. Если выполнено условие б) определения 1.32, то рассуждаем аналогично, заменяя g_1 на g_2 и $\{a'\}$ на $\{a''\}$.

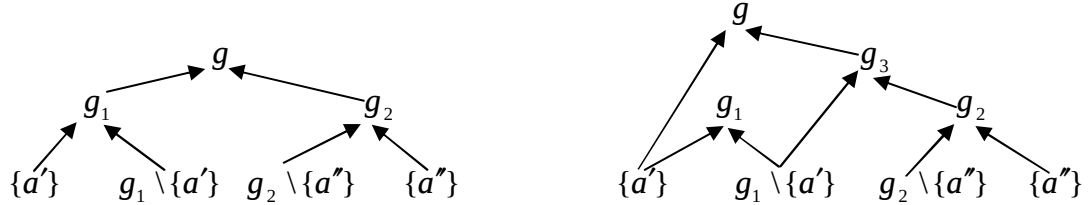


Рис. 1.7. Перестроение графа при существенно выпуклом функционале.

Итак, в обоих случаях получим 2-организацию $G' \in O_2(f)$, в которой вершина g правильна. Как и в G_2 , во все неначальные вершины G' входит 2 ребра. Пусть вершина g_3 неправильна. Мощность g_3 меньше, чем мощность g , все вершины, подчиненные g_3 , правильны. Повторим перестроение, взяв вместо G_2 граф G' , а вместо g вершину g_3 , что снова уменьшит мощность неправильной вершины. Продолжая перестроения, в итоге получим 2-организацию G' , в которой на одну неправильную вершину меньше, чем в G , и выполнено $P(G') \leq P(G)$. Прделав вышеуказанные действия нужное число раз, придем к 2-организации без неправильных вершин, то есть к последовательной организации G_p , $P(G_p) \leq P(G)$. Теорема доказана.

Далее в работе считаем, что $O_p(f)$ содержит только организации без повторяющихся групп. В силу теоремы 1.7 решение задачи на таком множестве будет решением и на исходном множестве. По лемме 1.4 для произвольной организации $G = (V, E) \in O_p(f)$ и любой вершины $g \in V \setminus N_G$ выполнено $Q_G(g) = \{h, \{a\}\}$, где $\{a\} \in N_G$, $\{a\} \not\subset h$ (иначе группы повторяются). То есть любая неэлементарная группа организуется

¹ Если группа, равная g_3 , уже присутствует в графе, то одинаковые группы не отождествляются, а во множестве вершин появляется повторение.

путем “добавления” элемента к некоторой своей подгруппе. Таким образом, G не содержит пересечений, то есть $G \in \tilde{O}_2(f)$.

Последовательная организация $G \in O_p(f)$ одной группы представляет собой частный случай 2-дерева: $G \in D_2(f) = \tilde{O}_2(f)$. В G группа $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ организуется из некоторой элементарной подгруппы $\{a_{i_n}\}$ и подгруппы $g_{n-1} = f \setminus \{a_{i_n}\}$. В свою очередь, g_{n-1} организуется из некоторой элементарной подгруппы $\{a_{i_{n-1}}\}$ и подгруппы $g_{n-2} = g_{n-1} \setminus \{a_{i_{n-1}}\}$. И так далее, g_2 организуется из элементарных подгрупп $\{a_{i_2}\}$ и $\{a_{i_1}\}$. Здесь через $(i_1, \mathbf{K}, i_n)$ обозначена произвольная перестановка чисел $(1, \mathbf{K}, n)$. Таким образом, любая последовательная организация одной группы состоит из элементарных групп $\{a_{i_1}\}, \mathbf{K}, \{a_{i_n}\}$, которые последовательно организуются в группы $g_2, \mathbf{K}, g_n$, где $g_n = f$. Общий вид последовательной организации одной группы приведен на рис. 1.8. Введем определение, которое понадобится в последующих главах.

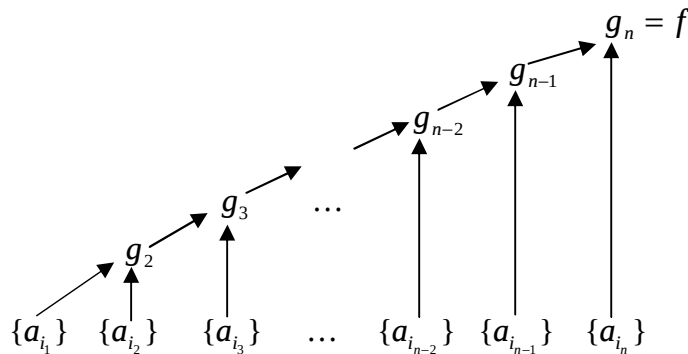


Рис. 1.8. Общий вид последовательной организации одной группы.

Определение 1.33. Будем говорить, что в последовательной организации $G \in O_p(f)$ одной группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ на j -ом месте стоит элемент a_{i_j} , $j = \overline{1, n}$, где $(i_1, \mathbf{K}, i_n)$ – произвольная перестановка чисел $(1, \mathbf{K}, n)$.

Подведем итоги данной главы, кратко охарактеризовав полученные методы решения задачи об оптимальной иерархии.

В §1 задача об оптимальной иерархии поставлена в общем виде: на произвольном множестве ориентированных ациклических графов найти граф, минимизирующий произвольный функционал стоимости. В данной работе изучаются лишь конечные графы (некоторые методы изучения бесконечных иерархий приведены в [16]). Доказано, что функционал локален тогда и только тогда, когда он аддитивен (см. теор. 1.1). Тем самым дана содержательная интерпретация локальных функционалов. То есть если априори ясно, что исследуемый функционал аддитивен, то можно считать его представимым в виде суммы стоимостей отдельных звеньев. Введено свойство простоты функционала, которое подразумевает аддитивность и равенство стоимостей структурно эквивалентных графов (одинаковых с точностью до переименования неначальных вершин). Доказано (см. теор. 1.2 и 1.3), что в общем случае простота эквивалентна структурности (см. опр. 1.17). Тем самым дана содержательная интерпретация структурных функционалов, которые и исследуются в данной работе.

В §2 построено отображение исходного множества Ω произвольных графов во множество графов организации (см. опр. 1.19) и показано, что в случае структурного функционала решение задачи на множестве графов организации даст решение и на исходном множестве. Введены различные варианты множества графов организации: $O(f)$, $O_r(f)$, $O_p(f)$, $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$ (см. опр. 1.22-1.25). В дальнейшем разрабатываются методы решения задачи на этих множествах.

В §3 определяются свойства монотонности, выпуклости, вогнутости, существенной выпуклости структурного функционала и доказываются теоремы 1.4-1.8 по поводу вида оптимальной организации для вышеуказанных вариантов функционала. Одна из возможных аналогий с выпуклостью и вогнутостью в "классическом" смысле приведена в пункте 1 §1 главы II. По поводу организации произвольного набора групп f можно сделать следующие выводы из теорем 1.5, 1.7, 1.8:

а) При выпуклом функционале организация, оптимальная на $O_2(f)$, будет оптимальна и на $O_r(f)$, $O(f)$, а организация, оптимальная на $\tilde{O}_2(f)$, будет оптимальна и на $\tilde{O}_r(f)$, $\tilde{O}(f)$ (см.

теор. 1.5 и следствие 1). То есть оптимальна 2-организация произвольного набора групп.

б) При существенно выпуклом функционале организация, оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$, будет оптимальна и на $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ (см. теор. 1.8)¹. В главе IV построены алгоритмы, позволяющие решить задачу об оптимальной организации на $O_p(\mathbf{f})$. Следовательно, для существенно выпуклого функционала алгоритмы главы IV исчерпывающим образом решают задачу на $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$.

с) При поиске оптимальной организации на $O_2(\mathbf{f})$, $O_p(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ можно ограничиться организациями без повторяющихся групп, а в случае монотонного функционала то же верно и для множеств $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$ (см. теор. 1.7).

По поводу организации одной группы f можно сделать следующие выводы из теорем 1.4-1.7 (напомним, что по утв. 1.2 $D(f) = \tilde{O}(f)$, $D_r(f) = \tilde{O}_r(f)$):

а) При монотонном функционале организация, оптимальная на $D(f)$, будет оптимальна и на $O(f)$, а организация, оптимальная на $D_r(f)$, будет оптимальна и на $O_r(f)$ (см. теор. 1.4 и следствие). То есть при монотонном функционале дерево минимальной стоимости также будет и оптимальной организацией одно группы.

б) При монотонном выпуклом на наборах непересекающихся групп функционале организация, оптимальная на $D_2(f)$, будет оптимальна и на $D(f)$, $D_r(f)$, $O(f)$, $O_r(f)$ (см. следствие 2 к теор. 1.5). То есть при монотонном выпуклом функционале 2-дерево минимальной стоимости также будет и оптимальной организацией одно группы.

с) При монотонном вогнутом на наборах непересекающихся групп функционале всеерная организация будет оптимальна на $O(f)$ и $\tilde{O}(f)$ (см. теор. 1.6 и следствие).

д) При поиске оптимального дерева на $D(f)$ и $D_r(f)$ можно ограничиться деревьями без повторяющихся групп (см. теор. 1.7).

¹ Как указано выше, считаем, что $O_p(\mathbf{f})$ содержит лишь организации без повторяющихся групп, таким образом, множество $O_p(\mathbf{f})$ вложено во множества $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$.

Алгоритмы поиска таких деревьев построены в главе III и позволяют исчерпывающим образом решить задачу об оптимальной организации на $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$, а при монотонном функционале и на $O(f)$, $O_r(f)$ (см. п. а). При монотонном выпуклом на наборах непересекающихся групп функционале используются алгоритмы поиска оптимального 2-дерева с меньшей сложностью (см. п. б).

Примеры использования построенного аппарата при рассмотрении частных задач в рамках общей постановки приведены в §1 главы II. Примеры функционалов, анализ их монотонности, выпуклости, вогнутости, существенной выпуклости и выводы из теорем 1.4-1.8 для каждого из примеров приведены в §2 главы II.

Глава II. Общие методы оптимизации иерархических структур в частных задачах.

В данной главе различные частные задачи рассматриваются в контексте общей задачи оптимизации иерархических структур, которая сформулирована и частично решена в предыдущей главе. В §1 рассмотрены задачи, имеющие конкретную содержательную интерпретацию. В §2 исследуются различные примеры структурных функционалов стоимости. В конце главы кратко резюмируются результаты использования общих методов главы I для анализа частных постановок задачи об оптимальной иерархии.

§1. Примеры задач поиска оптимальной структуры.

Во многих работах, в частности в [37, 41, 43], под сложной системой понимается множество элементов, взаимодействующих между собой определенным образом. Управление элементами состоит в некоторой координации их взаимодействий. То есть некоторые элементы подчиняются управляющему центру, который координирует их связи. Управляющие центры, в свою очередь, могут подчиняться центрам более высокого уровня, которые координируют связи между множествами элементов, и так далее. Управляющий центр высшего уровня координирует взаимодействие всех элементов. Формально это описывается следующим образом.

Иерархией над множеством элементов $N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ называется дерево, вершины которого являются некоторыми подмножествами N ; корнем является $f = N$; множества $g_1, \mathbf{K}, g_k$ на концах дуг, входящих в g , удовлетворяют условиям $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$, $g_i \cap g_j = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq k$; висячими вершинами являются одноэлементные подмножества N .

Определенная таким образом в [41] иерархия¹ является, согласно определениям 1.19 и 1.27, деревом организации группы

¹ С точностью до обозначений и направления дуг в дереве не от корня к листьям, а наоборот.

f , то есть принадлежит $D(f)$. В зависимости от конкретной содержательной интерпретации элементов и управляющих центров, в различных частных постановках по разному определяется функционал стоимости, возможны различные ограничения на деревья, то есть исследуемое множество структур Ω является подмножеством $D(f)$: $\Omega \subseteq D(f)$. Далее в этом параграфе рассмотрены различные примеры таких задач.

1. Оптимальная организация технологического взаимодействия элементов.

Как отмечается в различных работах (см., например, [45, 52]), структура производственных потоков в наибольшей степени определяет организационную структуру. В связи с этим интересно рассмотреть задачу надстройки управляющего графа организации над множеством элементов, связанных технологическими взаимодействиями. Обобщив некоторые известные постановки, в [17] задача поставлена следующим образом.

Технологическим графом над множеством элементов N назовем ориентированный граф без петель $T = (N, E_T)$, ребрам которого $(u, v) \in E_T$ сопоставлены s -мерные вектора $l_T(u, v)$ с неотрицательными компонентами: $l_T : E_T \rightarrow R_+^s$. Вершины графа T – это элементарные операции технологического процесса предприятия или конечные исполнители. Связь $(u, v) \in E_T$ в технологическом графе означает, что от элемента u к элементу v идет s -компонентный поток сырья, материалов, энергии, информации и т. п. Интенсивность каждой компоненты потока и определяется компонентами вектора $l_T(u, v)$.

Исходной информацией для построения технологического графа может служить анализ различных аспектов функционирования предприятия, например, анализ структуры систем связи [33, 38, 46], анализ документооборота [20] и т. п. Простой пример технологического графа с двухкомпонентными потоками (первая компонента – документы, вторая – “устная информация”) приведен на рис. 2.1. Вершины данного графа можно рассматривать и как рабочие места, и как операции. Часто при организации подобных технологических процессов ограничиваются тем, что назначают ответственных за выполнение

той или иной операции. Однако в общем случае для нормального функционирования системы этого недостаточно, так как технологические связи между операциями (исполнителями) специально не контролируются. То есть необходимо создание управляющих центров, которые координируют взаимодействие элементов.

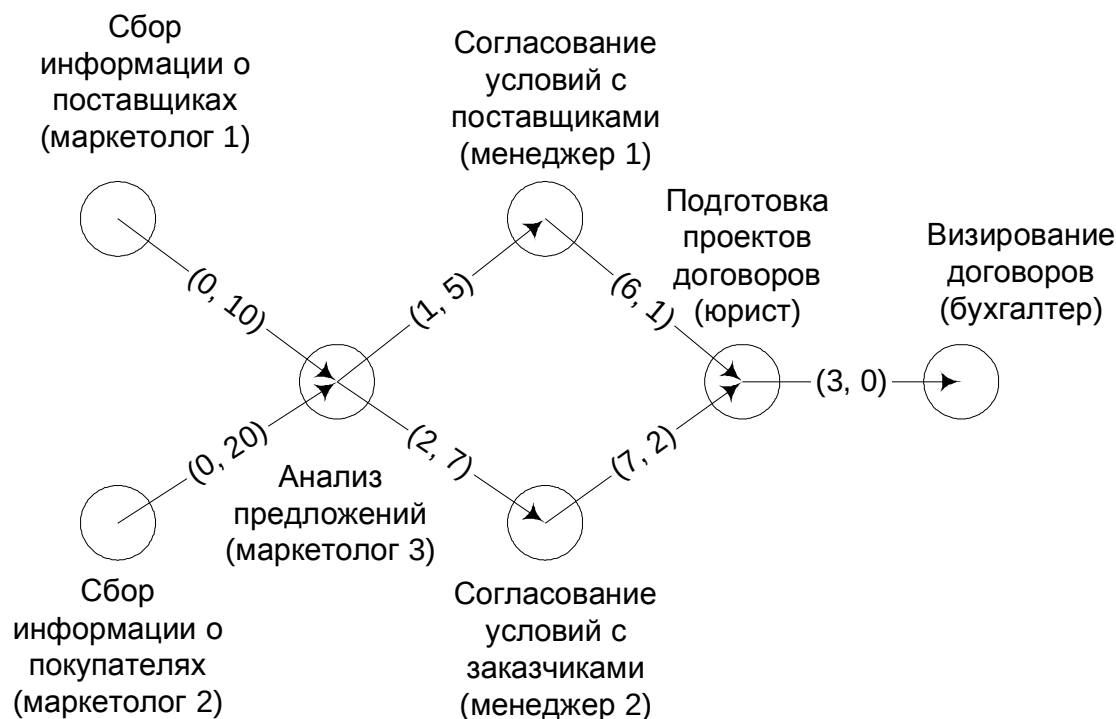


Рис. 2.1. Технологический граф процесса подписания договоров.

Считаем технологический граф связным¹, так как в противном случае происходит декомпозиция на никак не связанные друг с другом части, которые могут быть рассмотрены по отдельности. Для того чтобы каждая связь кем-то контролировалась, и каждая вершина была подчинена только одному “начальнику”, необходимо наличие управляющего центра, которому подчинено все множество исполнителей (элементов) $f = N$. Таким образом, рассматривается множество Ω всевозможных деревьев организации: $\Omega = D(f)$.

¹ Имеется в виду связность при рассмотрении ребер как неориентированных. В этом случае при любом разбиении множества вершин N на части N_1 и N_2 , $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ существуют ребра, идущие из N_1 в N_2 или наоборот.

Рассмотрим группу элементов $g \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Через $l_T(g)$ обозначим суммарную интенсивность потоков внутри группы, то есть $l_T(g) = \sum_{u,v \in g, (u,v) \in E_T} l_T(u,v)$. Пусть в некотором дереве

$D = (V, E) \in D(f)$ группа $g \in V$ организуется из непересекающихся подгрупп $Q_D(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$. Тогда центр, соответствующий группе g , координирует потоки между подгруппами $g_1, \mathbf{K}, g_k$. Их суммарная интенсивность, очевидно, равна $l_T(g) - l_T(g_1) - \mathbf{K} - l_T(g_k)$. Предполагаем, что затраты на содержание (функционирование) управляющего центра являются некоторой неотрицательной функцией $K(\cdot)$ от интенсивности координируемого потока. Тогда можно записать функционал стоимости организации взаимодействия подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ следующим образом:

$$P_{T,K}(g_1, \mathbf{K}, g_k) = K(l_T(g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k) - l_T(g_1) - \mathbf{K} - l_T(g_k)).$$

Стоимость $P(D) = \sum_{g \in V \setminus N_D} P(g_1, \mathbf{K}, g_k) (Q_D(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\})$ содержания (функционирования) всей организации D будет структурным функционалом и задача об оптимальной организации технологического взаимодействия – частный случай общей задачи об оптимальной организации на $D(f)$.

Построенные в главе III алгоритмы поиска оптимального дерева могут быть использованы для решения задачи в общем случае. Кроме того, ниже доказываются некоторые аналитические результаты.

Частный случай поставленной задачи рассмотрен, например, в [37]. Связи между элементами (ребра технологического графа) характеризуются тремя градациями “интенсивности” взаимодействия: низкая, средняя и высокая, после чего применяется эвристический алгоритм группировки наиболее “связанных” элементов, затем наиболее “связанных” групп и т.д.

На рис. 2.2 приведены примеры “надстройки” дерева организации над технологическим графом. На рисунке слева организация состоит из элементов технологического графа 1-7 и трех управляющих центров (узлов) I, II, III. Подчиненными узла I являются все маркетологи (элементы 1-3 технологического графа), подчиненными узла II – менеджеры и юрист (элементы 4-6), в подчинении узла III – узлы I, II и бухгалтер (элемент 7). Группы,

подчиненные узлам I, II, III, обведены криволинейными фигурами. В середине рисунка приведен пример 2-дерева, справа изображена веерная организация.

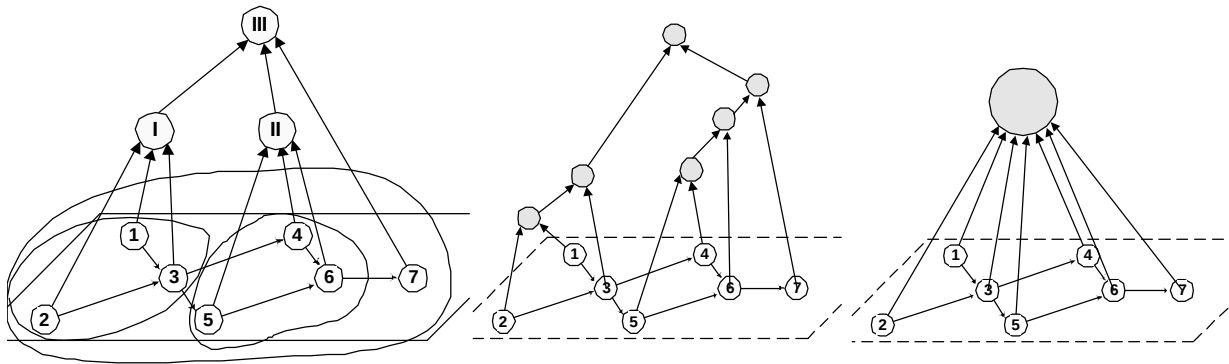


Рис. 2.2. Примеры структур системы управления технологическими связями.

Утверждение 2.1. Если для любых векторов $l', l'' \in R_+^s$ выполнено $K(l' + l'') \geq K(l') + K(l'')$, то для любого технологического графа T функционал $P_{T,K}$ выпуклый на наборах непересекающихся групп, а если $K(l' + l'') \leq K(l') + K(l'')$ – вогнутый.

Доказательство. Пусть $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ – произвольный набор непересекающихся групп, $k \geq 3$. Рассмотрим произвольное разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$, $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$, $1 < i < k$ (см. опр. 1.30). Рассмотрим следующие векторы $l = l_T(g) - l_T(g_1) - \mathbf{K} - l_T(g_k)$, $l' = l_T(h) - l_T(h_1) - \mathbf{K} - l_T(h_i)$, $l'' = l_T(g) - l_T(h) - l_T(h_{i+1}) - \mathbf{K} - l_T(h_k)$, где $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$, $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$. Выполнено $l' + l'' = l_T(g) - l_T(h_1) - \mathbf{K} - l_T(h_i) - l_T(h_{i+1}) - \mathbf{K} - l_T(h_k) = l$. Кроме того, можно записать равенства $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = K(l)$, $P(h_1, \mathbf{K}, h_i) = K(l')$, $P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k) = K(l'')$. Если $K(l' + l'') \geq K(l') + K(l'')$, то выполнено неравенство а) определения 1.30, а если $K(l' + l'') \leq K(l') + K(l'')$ – то неравенство б). Утверждение доказано.

Таким образом, если функция затрат супераддитивна (выполнено первое неравенство утв. 2.1), то существует 2-дерево организации, оптимальное на $D(f)$ (см. следствие 1 к теор. 1.5). Если функция затрат субаддитивна (выполнено второе

неравенство утв. 2.1), то оптимальна веерная организация (см. следствие к теор. 1.6). В первом случае для решения задачи можно воспользоваться алгоритмами поиска оптимального 2-дерева, которые имеют меньшую сложность, чем для произвольного дерева (см. гл. III). Во втором случае оптимальная организация найдена.

Если функция $K(l)$ зависит только от линейной комбинации компонент вектора $l = (l_1, \dots, l_s)$, то есть имеет вид $K(l) = K'(a_1 l_1 + \dots + a_s l_s)$, то можно заменить все вектора на ребрах технологического графа соответствующими величинами и рассмотреть вместо функции $K(\cdot)$ одномерную функцию затрат $K'(\cdot)$.

Лемма 2.1. Если $K(0) = 0$ и одномерная функция затрат $K(\cdot)$ выпукла, то $K(x+y) \geq K(x) + K(y)$, а если вогнута, то $K(x+y) \leq K(x) + K(y)$ для любых $x, y \geq 0$.

Доказательство. Для выпуклой функции и любых $a, b \geq 0$, $0 \leq a \leq 1$ выполнено $K(aa + (1-a)b) \leq aK(a) + (1-a)K(b)$. Положим $a = 0$, $b = x+y$. Тогда при $a = y/(x+y)$ с учетом $K(0) = 0$ имеем $K(x) \leq K(x+y) \cdot x/(x+y)$. При $a = x/(x+y)$ имеем $K(y) \leq K(x+y) \cdot y/(x+y)$. Складывая два неравенства, получим $K(x) + K(y) \leq K(x+y)$. Для вогнутой функции все неравенства изменятся на противоположные. Лемма доказана.

То есть при условиях леммы 2.1 выпуклость влечет супераддитивность, вогнутость – субаддитивность. Рис. 2.3 иллюстрирует полученные результаты. При вогнутой функции затрат (рис. 2.3 справа) выгоднее координировать один большой поток, чем несколько малых. То есть оптимальное дерево – веерная организация – содержит один центр, которому подчинены все элементы. При выпуклой функции затрат (рис. 2.3 слева) выгоднее координировать несколько малых потоков, чем один большой. То есть если некоторый центр координирует более двух групп, то выгоднее ввести еще один промежуточный центр. В результате оптимально 2-дерево организации, которое имеет максимальное количество центров управления.

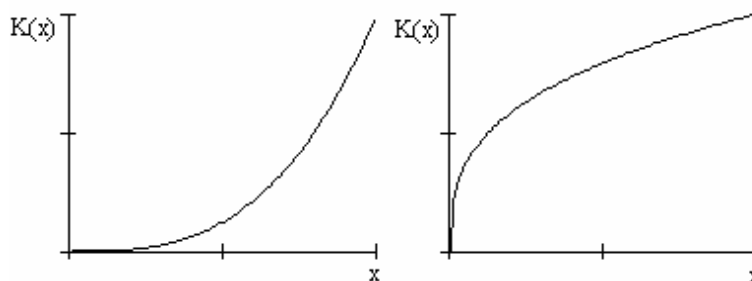


Рис. 2.3. Выпуклая и вогнутая функция затрат.

Если для одномерной выпуклой функции затрат выполнено $K(0) > 0$, то условие $K(x + y) \geq K(x) + K(y)$ может не выполняться, и, следовательно, 2-деревья могут не быть оптимальными. Величину $K(0)$ можно рассматривать как начальные затраты по содержанию узла при нулевом контролируемом потоке. Для этого случая, интересного с содержательной точки зрения, в [17] предложен эвристический алгоритм решения.

2. Оптимальное алфавитное кодирование.

В алгебраической теории кодирования рассматриваются два алфавита (см., например, [42]): входной $\{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ и выходной $\{b_1, \mathbf{K}, b_r\}$. Считается заданным алфавитный код (схема кодирования), если каждому символу a_i входного алфавита сопоставлена непустая последовательность символов (кодированное слово) w_i выходного алфавита. Длину слова w_i обозначим через $l_i \geq 1$. Код называется разделимым (декодируемым), если любая последовательность кодовых слов, записанных подряд, имеет только одну интерпретацию, то есть может быть разделена на подряд идущие кодовые слова единственным образом. Код называется префиксным, если w_i не является началом никакого слова w_j , $i \neq j$. Очевидно, что любой префиксный код делим.

Для любого делимого кода выполнено неравенство Макмиллана $\sum_{i=1, n} 1/r^{l_i} \leq 1$ [51]. Известно (см., например, [42]), что если величины $l_1, \mathbf{K}, l_n$ удовлетворяют неравенству Макмиллана, то существует префиксный код с длинами слов $l_1, \mathbf{K}, l_n$. Таким образом, для любого делимого кода с длинами $l_1, \mathbf{K}, l_n$ существует префиксный код с такими же длинами. По этой

причине в теории кодирования рассматриваются, в основном, префиксные коды, которые имеют наиболее простую процедуру декодирования.

Считаем заданными вероятности $p_1, \mathbf{K}, p_n$ появления символов $a_1, \mathbf{K}, a_n$ в тексте, $p_1 + \mathbf{K} + p_n = 1$. Если входной текст имеет длину L , то математическое ожидание длины кодового сообщения составит $L(p_1 l_1 + \mathbf{K} + p_n l_n)$. Разделимый код называется оптимальным (кодом с минимальной избыточностью [48]), если величина $p_1 l_1 + \mathbf{K} + p_n l_n$ минимальна, то есть минимальна средняя длина кодовых сообщений. Задача об оптимальном коде состоит в поиске оптимального префиксного кода для заданных вероятностей.

Обозначим $f = N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ и рассмотрим произвольное r -дерево $D = (V, E) \in D_r(f)$. Для всех вершин $g \in V \setminus N_D$ проделаем следующую операцию. Пусть $Q_D(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \leq r$. Сопоставим каждому из ребер $(g_1, g), \dots, (g_k, g)$ символ (букву) выходного алфавита, причем разным ребрам сопоставим разные символы. Полученное r -дерево будем называть помеченным (такие деревья описаны, например, в работе [42]). Для сведения задачи об оптимальном префиксном коде к задаче об оптимальной организации докажем следующее утверждение о соответствии деревьев кодам.

Утверждение 2.2. Существует изоморфизм, при котором каждому префиксному коду соответствует одно и только одно помеченное r -дерево $D \in D_r(f)$, причем длина l_i кодового слова w_i равна длине пути из $\{a_i\}$ в $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ в соответствующем дереве.

Доказательство. Пусть задан некоторый префиксный код. Построим соответствующее ему r -дерево $D \in D_r(f)$. В корне r -дерева находится группа из всех символов входного алфавита, а в листьях – группы из одиночных символов. В каждую вершину r -дерева входит не более r ребер (r – число символов выходного алфавита). На первом шаге построения считаем, что дерево D состоит из одной изолированной вершины f . Построим множества $g_1, \mathbf{K}, g_r$ следующим образом. В группу g_i включим те

символы a_j из f , для которых первая буква кодового слова w_j равна b_i . То есть в первое множество включаем символы, кодовые слова которых начинаются с первой буквы выходного алфавита, во вторую – со второй, и так далее. Некоторые множества из $g_1, \mathbf{K}, g_r$ могут быть пустыми (если нет слов, начинающихся на данную букву). Добавим в r -дерево D непустые группы g_i и ребра (g_i, f) , поставив в соответствие ребру (g_i, f) букву b_i . В силу равенств $f = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_r$ и $g_i \cap g_j = \emptyset$ получим, что f в D организуется из непересекающихся подгрупп $Q_D(f)$. Для добавленных подгрупп g сделаем то же самое, что и для f , только разбиение множества символов g проводим не по первой букве кодовых слов, а по второй. После этого в D добавятся новые группы, для них проводим разбиение по третьей букве кодовых слов и так далее. Подгруппы для g не добавляются (процесс прекращается), если хотя бы для одного символа $a_i \in g$ исчерпано кодовое слово w_i . Покажем, что в результате действительно получим r -дерево $D \in D_r(f)$.

Предположим, что на очередном шаге получили неэлементарную группу g и необходимо разбить ее на подгруппы по l -ой букве кодового слова. Процесс останавливается, если некоторому символу $a_i \in g$ соответствует кодовое слово w_i с длиной, меньшей l , то есть $l_i < l$. В силу неэлементарности g существует символ $a_j \in g$, $a_i \neq a_j$. По предыдущим построениям первые $l-1$ букв в словах w_i и w_j совпадают, следовательно w_i является началом слова w_j , что противоречит префиксности кода. То есть для всех $a_i \in g$ выполнено $l_i \geq l$ и разбиение по l -ой букве провести можно. Процесс может остановиться только на элементарной группе. Разбиение g может быть тривиальным, то есть содержать g и пустые группы, если все l -ые буквы совпадают (при этом в r -дерево D появятся повторяющиеся группы, в частности, если $g = \{a_i\}$ и конец слова w_i еще не достигнут). В силу конечности кодовых слов через некоторое число шагов процесс закончится, причем будет ровно n начальных вершин $\{a_1\}, \mathbf{K}, \{a_n\}$ (повторяться начальные группы не могут, так

как по построению нет пересечений). По утверждению 1.2 $D \in D_r(f)$, то есть является r -деревом организации группы f .

Обратно, рассмотрим произвольное помеченное дерево $D \in D_r(f)$. Из каждой начальной вершины $\{a_i\}$ существует ровно один путь в f . Пройдем этот путь от конца к началу, последовательно выписывая буквы, соответствующие проходимым ребрам. Получим слово w_i длины l_i , которая равна длине пути из $\{a_i\}$ в f . Если бы w_i было началом слова w_j , то путь из $\{a_j\}$ в f содержал бы путь из $\{a_i\}$ в f , то есть вершина $\{a_j\}$ была бы подчинена $\{a_i\}$, что невозможно. То есть получили префиксный код $w_1, \mathbf{K}, w_n$. Утверждение доказано.

Для произвольных групп $g_1, \mathbf{K}, g_k \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ определим структурный функционал стоимости следующим образом:

$$(2.1) \quad P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \sum_{a_i \in g} p_i,$$

где $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$. То есть стоимость организации группы g равна сумме вероятностей появления тех символов, которые входят в g , независимо от подгрупп, из которых организуется g . Тогда для любого r -дерева $D = (V, E) \in D(f)$ выполнено $P(D) = \sum_{g \in V \setminus N_D} P(Q_D(g)) = \sum_{g \in V \setminus N_D} \sum_{a_i \in g} p_i = p_1 l_1 + \mathbf{K} + p_n l_n$, где l_i – количество неначальных групп, в которые входит элемент a_i , то есть длина пути из $\{a_i\}$ в f .

Таким образом, при функционале (2.1) стоимость $P(D)$ r -дерева D , соответствующего префиксному коду, равна средней длине кодового слова. Следовательно, имея r -дерево минимальной стоимости на $D_r(f)$ и пометив ребра некоторым образом, найдем оптимальный код, и обратно, имея оптимальный код, построим r -дерево $D \in D_r(f)$ минимальной стоимости¹. То есть задача об оптимальном дереве на $D_r(f)$ с функционалом (2.1) эквивалентна задаче об оптимальном алфавитном коде с входным алфавитом $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$, набором вероятностей $p_1, \mathbf{K}, p_n$ и выходным алфавитом $\{b_1, \mathbf{K}, b_r\}$.

¹ Процедуры построения дерева по коду и кода по дереву описаны в доказательстве утверждения 2.2.

На рис. 2.4 приведен пример оптимального префиксного кода с входным алфавитом $\{a, b, c, d\}$, вероятностями появления символов 0,4; 0,3; 0,2; 0,1 и выходным алфавитом $\{0,1\}$. Как видно из рисунка, длины путей (кодовых слов) равны 1, 2, 3, 3. Средняя длина пути, стоимость r -дерева и средняя длина кодового слова равны 1,9. Символу a , который встречается наиболее часто, соответствует кратчайшее кодовое слово 0. Остальным – более длинные кодовые слова. Если бы вероятности появления всех символов совпадали, то оптимальным было бы симметричное 2-дерево и все кодовые слова состояли бы из двух букв.

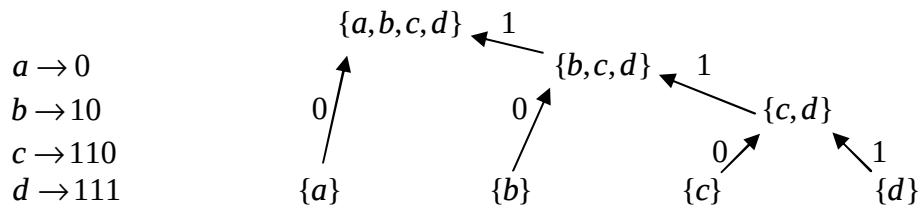


Рис. 2.4. Оптимальный бинарный код и соответствующее 2-дерево.

Разработанные в главе III общие алгоритмы поиска оптимального r -дерева могут быть использованы для построения оптимальных кодов. Разумеется, в теории кодирования созданы гораздо более эффективные алгоритмы: для $r = 2$ – это алгоритм Хаффмана построения оптимального бинарного кода [48], для произвольного $r \geq 2$ обобщение алгоритма Хаффмана описано, например, в [42]. Алгоритмы имеют порядок сложности $n \log n$ и позволяют, таким образом, решать задачи на $D_r(f)$ для функционала (2.1).

Утверждение 2.3. Функционал (2.1) вогнут.

Доказательство. Рассмотрим набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и произвольное разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$ (см. опр. 1.30), $k \geq 3$, $1 < i < k$. Обозначим $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$, $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$. Тогда $g = h \cup h_{i+1} \cup \mathbf{K} \cup h_k$, то есть $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \sum_{a_i \in g} p_i = P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k)$. Следовательно, верно неравенство $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) \leq P(h_1, \mathbf{K}, h_i) + P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k)$. Утверждение доказано.

Таким образом, по следствию к теореме 1.6 оптимальным деревом на $D(f)$ будет веерная организация стоимости 1. Она же

будет оптимальной на $D_r(f)$ при $r \geq n$, так как в этом тривиальном случае каждому символу входного алфавита соответствует слово из одной буквы выходного алфавита.

3. Оптимальная структура управления сетью доставки материальных потоков.

В различных работах (см., например, [10, 37]) приводится следующая задача¹. Задана сеть доставки материальных потоков $T = (N, E_T)$, то есть ориентированный граф с множеством вершин N и дуг E_T , связывающий источники материальных потоков с потребителями через промежуточные точки ветвления. Каждая дуга $(u, v) \in E_T$ характеризуется потоком заявок частоты $p(u, v)$ на материальные потоки и величиной материального потока $j(u, v)$.² Рассмотрим дерево $D = (V, E) \in D(f)$, где $f = N$. Для любой вершины $h \in V \setminus N_D$ частота заявок $p(h)$ и суммарный материальный поток $j(h)$, с которыми “имеет дело” центр, управляющий группой h , вычисляются следующим образом (см. [37]):

$$p(h) = p(h, N \setminus h) + p(N \setminus h, h) + \sum_{h' \in Q_D(h)} p(h', h \setminus h'),$$

$$j(h) = j(h, N \setminus h) + j(N \setminus h, h) + \sum_{h' \in Q_D(h)} j(h', h \setminus h'),$$

где для любых групп $g', g'', g' \cap g'' = \emptyset$ через $p(g', g'') = \sum_{(u,v) \in E_T, u \in g', v \in g''} p(u, v)$ и $j(g', g'') = \sum_{(u,v) \in E_T, u \in g', v \in g''} j(u, v)$ соответственно

обозначены поток заявок и материальный поток из группы g' в группу g'' . Таким образом, через центр, управляющий группой h , проходит поток заявок из h во все остальные элементы N (первое слагаемое), из всех остальных элементов N в h (второе слагаемое) и потоки заявок между подгруппами из $Q_D(h)$, которые непосредственно подчинены группе h (третье слагаемое). То же самое касается и материальных потоков. Общие потери (затраты), связанные с работой системы управления, определяются

¹ С точностью до обозначений.

² Сеть представляет собой частный случай технологического графа (см. п.1), но функционал стоимости определяется по-другому.

следующим образом:

$$P(D) = \sum_{h \in V \setminus N_D} [j(h)l(p(h), c(h)) + c(h)],$$

где $c(h)$ – стимулирование работы центра, управляющего группой h , $l(p(h), c(h))$ – доля материального потока, которая теряется из-за ошибок в управлении.

При заданном стимулировании функционал $P(D)$ структурен, так как для любой группы $h \in V \setminus N_D$ величины $j(h)$, $p(h)$, $c(h)$ определяются только самой группой h и группами из $Q_D(h)$, которые непосредственно подчинены h , то есть набором подчиненных групп. Таким образом, для поиска оптимальной структуры управления, то есть дерева $D \in D(f)$, минимизирующего потери $P(D)$, можно использовать алгоритмы поиска оптимального дерева, разработанные в главе III. При этом неважно, какая сеть рассматривается – однопродуктовая или многопродуктовая, так как величины p и j могут быть как числами, так и векторами. В [37] отмечается, что задача в общем случае весьма сложна. В [10] для однопродуктовой сети и функции $l(\cdot, \cdot)$ специального вида рассмотрена комбинированная задача выбора стимулирования (правил функционирования) и структуры управления.

4. Оптимальная структура управления однородными элементами.

В работе [21] рассмотрена следующая задача. Задано множество N элементов нулевого уровня, $n = |N|$. Каждый элемент нулевого уровня должен быть связан с одним элементом первого уровня, в свою очередь элемент первого уровня – с одним элементом второго, и т.д. Элементы уровня $l-1$ связываются с единственным элементом уровня l . С каждым элементом уровня j связан, по крайней мере, один элемент уровня $j-1$. Обозначим через n_j количество элементов на j -ом уровне управления, $j = \overline{0, n}$. Тогда $1 = n_l \leq n_{l-1} \leq \mathbf{K} \leq n_1 \leq n_0 = n$. Обозначим через $x_{ji} \geq 1$ количество элементов уровня $j-1$, которые подчинены

i -му элементу уровня j , $j = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, n_j}$, $\sum_{i=\overline{1, n_j}} x_{ji} = n_{j-1}$.

Предполагается, что затраты $K^j(x_{ji}) \geq 0^1$ на создание пункта управления зависят только от количества подчиненных x_{ji} и от уровня j . То есть все элементы одного уровня предполагаются однородными, так что затраты зависят лишь от количества подчиненных элементов, но не от их состава. Задача построения оптимальной структуры управления заключается в поиске чисел l, n_j, x_{ji} , которые удовлетворяют вышеуказанным ограничениям и

минимизируют суммарную величину затрат $\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} K^j(x_{ji})$. При

этом количество уровней не должно превосходить некоторой предельной величины: $l \leq L$.

Очевидно, что рассматриваемые структуры представляют собой деревья из $D(f)$, где $f = N$. Длина пути из начальной вершины в f не должна превосходить L . Обозначим множество таких деревьев через $D_L(f) \subseteq D(f)$. Кроме того, накладывается ограничение на подчиненность: длина пути в вершину g из любой подчиненной начальной вершины $\{a\} \subseteq g$ одинакова и равна уровню g .² Обозначим множество таких деревьев через $\overline{D}_L(f) \subseteq D_L(f)$. На множестве $\overline{D}_L(f)$ задан функционал стоимости дерева $D = (V, E) \in \overline{D}_L(f)$: $P(D) = \sum_{g \in V \setminus N_D} K^j(|Q_D(g)|)$.

В общем случае функционал неструктурен, так как зависит не только от групп, непосредственно подчиненных группе g , но и от уровня j группы g , то есть от длины пути из начальной вершины в g . Таким образом, рассмотренная задача представляет собой задачу об оптимальной организации с неструктурным функционалом стоимости. Очевидно, что функционал P можно продолжить на $D_L(f)$ по вышеуказанной формуле. Тогда верно следующее утверждение.

¹ В работе [21] условие неотрицательности затрат $K^j(x_{ji}) \geq 0$ явно не выписано, но подразумевается при построении методов решения.

² То есть одной вершине не могут быть подчинены вершины разных уровней.

Утверждение 2.4. Если для любого j выполнено $K^j(1) = 0$, то оптимальное на $\bar{D}_L(f)$ дерево будет оптимальным и на $D_L(f)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное дерево $D = (V, E) \in D_L(f)$. Для произвольной вершины $g \in V$ через $l(g)$ обозначим длину максимального пути из подчиненных начальных вершин $\{a\} \subseteq g$ в g . Рассмотрим $g \in V \setminus N_D$. Пусть $Q_D(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и $l' = \max(l(g_1), \mathbf{K}, l(g_k))$. Если для некоторой вершины g_i выполнено $l(g_i) < l'$, то сделаем следующее. Добавим в D $q = l' - l(g_i)$ экземпляров группы g_i ,¹ обозначив их через $g_i^1, \mathbf{K}, g_i^q$. Удалим ребро (g_i, g) . Вместо него создадим цепь $g_i - g_i^1 - \mathbf{K} - g_i^{q-1} - g_i^q - g$, то есть добавим ребра $(g_i, g_i^1), (g_i^1, g_i^2), \dots, (g_i^{q-1}, g_i^q), (g_i^q, g)$. После этого для всех вершин $h \in Q_D(g)$ величина $l(h)$ будет одинакова и равна l' . Прделав такие преобразования для всех вершин $g \in V \setminus N_D$, получим дерево $\bar{D} \in \bar{D}_L(f)$, в котором длина пути в вершину g из любой подчиненной начальной группы $\{a\} \subseteq g$ одинакова. В силу $K^j(1) = 0$ такое преобразование не изменит стоимости. Тогда оптимальному на $D_L(f)$ дереву D^* соответствует дерево $\bar{D}^* \in \bar{D}_L(f)$, для которого $P(D^*) = P(\bar{D}^*)$. В силу $\bar{D}_L(f) \subseteq D_L(f)$ дерево $\bar{D}^*$ оптимально на $\bar{D}_L(f)$. Утверждение доказано.

Таким образом, решив задачу об оптимальном дереве на $\bar{D}_L(f)$, найдем решение и на $D_L(f)$. Обратно, решив задачу на $D_L(f)$, преобразуем решение в оптимальное дерево на $\bar{D}_L(f)$ так, как указано в доказательстве утверждения 2.4. То есть при $K^j(1) = 0$ задачи на $\bar{D}_L(f)$ и $D_L(f)$ эквивалентны. В этом случае разработанные в [21] методы могут быть использованы для решения задачи на $D_L(f)$ с неструктурным функционалом P (при достаточно большом L эти же методы решают задачу и на $D(f)$).

¹ Множество V может содержать повторения, то есть добавляемые группы не отождествляются.

Поставленная задача в [21] называется однородной, если функция затрат одинакова на всех уровнях: $K^j(\cdot) = K(\cdot)$. В этом случае функционал стоимости структурен. Разработанные в главе III общие алгоритмы поиска оптимального дерева на $D(f)$ могут быть модифицированы для решения задачи на $D_L(f)$ (см. соответствующие сноски главы III). Тогда при $K(1) = 0$ общие алгоритмы позволяют решать однородную задачу. Но, разумеется, алгоритмы, разработанные в [21] для конкретного функционала стоимости, более эффективны.

Утверждение 2.5. Если для однородной задачи функция $K(\cdot)$ вогнута и не убывает, $K(0) = 0$, то функционал стоимости P вогнут.

Доказательство. Рассмотрим набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и его произвольное разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$, $k \geq 3$, $1 < i < k$. Обозначим $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$. Тогда $P(g_1, \mathbf{K}, g_k) = K(k)$, $P(h_1, \mathbf{K}, h_i) = K(i)$, $P(h, h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k) = K(k - i + 1)$. Тогда неравенство b) определения 1.30 переписывается в виде $K(k) \leq K(i) + K(k - i + 1)$. Из вогнутости и условия $K(0) = 0$ по лемме 2.1 имеем $K(x + y) \leq K(x) + K(y)$, то есть $K(k + 1) \leq K(i) + K(k - i + 1)$, а в силу неубывания $K(k) \leq K(k + 1)$. Утверждение доказано.

Из следствия к теореме 1.6 вытекает, что при условиях утверждения веерная организация оптимальна на множестве $D(f)$, а следовательно и на множествах $D_L(f)$ и $\bar{D}_L(f)$. Таким образом, из теоремы 1.6 следует один из результатов, полученных в [21].

5. Задачи с неструктурным функционалом и сложными ограничениями.

В предыдущем пункте приведен пример задачи, в которой лишь при определенных условиях функционал структурен и множество графов сводится к исследованным в данной работе вариантам множеств. Таким образом, необходима разработка общих методов решения для неструктурных функционалов и

множеств Ω различного типа. Приведем еще несколько примеров известных задач, в которых нарушается структурность или исследуется множество графов сложной конфигурации.

В [37] поставлена задача оптимизации на множестве $\Gamma_n^K \subseteq D(f)$ деревьев над n элементами ($n = |f|$), которые имеют K уровней иерархии (максимальный путь из листа в корень имеет длину K). Кроме того, допускаются прочие ограничения произвольного вида, то есть задача решается на множестве $\Gamma \subseteq \Gamma_n^K$. При этом функционал стоимости дерева $D = (V, E) \in \Gamma$ имеет очень простой вид: $P(D) = |V \setminus N_D| = \sum_{V \setminus N_D} 1$. То есть минимизируется количество управляющих центров (неначальных вершин). На множестве $D(f)$ задача решается тривиально – оптимальна всеерная организация (один центр). Для различных частных случаев множества Γ методы решения предложены в [37]. Также в [37] поставлена в некотором смысле обратная задача – на подмножестве деревьев с A управляющими центрами ищется дерево с минимальным количеством уровней иерархии.

В [39] рассмотрена задача надстройки структуры управления над технологическим графом, но вид функционала стоимости отличен от описанного в пункте 1. Задана “сила взаимосвязи” $d(a', a'')$ элементов $a', a'' \in N$. И рассматриваются m -уровневые деревья из $D(f)$, в которых все пути из начальных вершин в корень имеют одинаковую длину m . Обозначим такое дерево через $D = (V, E)$. В нем все начальные вершины имеют уровень 1, подчинены управляющим вершинам уровня 2, те, в свою очередь, управляющим вершинам уровня 3, и так далее, вершины уровня $m-1$ подчинены корню f .

Для каждой группы $h \in V \setminus N_D$ уровня l , $l = \overline{2, m}$ ее стоимость определяется следующим образом: $\Phi_D(h) = \frac{1}{|Q_D(h)| \cdot (|Q_D(h)| - 1)} \sum_{g', g'' \in Q_D(h), g' \neq g''} d_D(g', g'')$, где “сила взаимосвязи” $d_D(g', g'')$ групп g' и g'' рекурсивно определяется как средняя “сила взаимосвязи” групп, которые непосредственно подчинены группам g', g'' (и так далее, “сила взаимосвязи” групп первого уровня задана). Таким образом, стоимость $\Phi_D(h)$ зависит не

только от групп из $Q_D(h)$, которые непосредственно подчинены h , но и от всего поддерева с корнем h .

Общая стоимость дерева записывается как

$$\Phi(D) = \frac{1}{m-1} \sum_{l=2}^m \frac{1}{k_l} \sum_{h \in V \text{ уровня } l} \Phi(h), \text{ где } k_l - \text{ количество вершин уровня } l.$$

l . То есть $\Phi(D)$ – некоторая средняя сила взаимосвязи всех управляющих центров дерева. Задача об оптимальной иерархии представляет собой задачу поиска дерева вышеуказанного вида, для которого достигается максимум $\Phi(D)$, то есть задачу на определенном подмножестве $D(f)$ с неструктурным функционалом¹. Как указано в [39], при $m = 3$ и фиксированном k_2 эта задача сводится к широко известной задаче классификации, то есть разбиения множества объектов на заданное число классов по критерию “близости” объектов, оказывающихся внутри одного класса, и “удаленности” объектов, находящихся в разных классах (используется в теории распознавания образов). То есть даже в сугубо частном случае задача весьма сложна (см., например, [4, 22, 27, 28]). В общем случае в [39] построены лишь эвристические алгоритмы решения.

§2. Примеры структурных функционалов стоимости.

1. Сложность группы. Свойства функционала стоимости. Примеры (функционалы (I)-(IV)).

Во многих практически важных случаях (см., например, §1) можно считать, что структурный функционал $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ зависит не от самих подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, а от некоторых числовых характеристик $C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k)$ организуемых подгрупп и характеристики $C(g)$ группы $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$. Приведем формальные определения.

¹ Очевидно, что задача на максимум легко сводится к задаче на минимум с помощью рассмотрения функционала стоимости $P(D) = C - \Phi(D)$, где C – достаточно большая константа.

Определение 2.1. Сложностью группы назовем произвольную неотрицательную монотонную функцию группы $C : F \rightarrow [0, +\infty)$,¹ $C(g) \leq C(h)$ при $g \subseteq h$.

Определение 2.2. Структурный функционал стоимости назовем анонимным, если для любых подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k \in F$ его можно представить в виде $P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k), C(g))$,² где $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ – организуемая группа.

Сложность монотонна, то есть не убывает при расширении группы³. Если функционал не зависит от $C(g)$, то последний аргумент в определении 2.2 будем опускать. Далее в этом параграфе считаем функционал стоимости анонимным. Если при росте любого из аргументов анонимного функционала значение стоимости не убывает, то функционал монотонен (в силу монотонности сложности).

Можно привести следующий пример функции сложности. Пусть для всех $a \in N$ заданы произвольные величины $C(a) \geq 0$, то есть сложности элементов. Тогда для произвольной группы $g \in F$ определим ее сложность следующим образом:

$$(2.2) \quad C(g) = \left(\sum_{a \in g} C(a)^{1/a} \right)^a,$$

где $a \in (0, +\infty)$ – параметр сложности. При $a = 1$ сложность группы равна сумме сложностей составляющих ее элементов, при $a > 1$ – больше этой суммы (усложняющий параметр), при $a < 1$ – меньше (упрощающий параметр). Некоторые результаты этого параграфа будут касаться произвольной функции сложности, остальные справедливы для функции сложности вида (2.2).

¹ F – множество групп, см. опр. 1.13.

² Здесь и далее одной и той же буквой P обозначается функционал, зависящий от набора групп, и от набора сложностей, что не приводит к путанице в силу различия аргументов функционалов.

³ Такие функции множества обычно называют емкостью, однако, исходя из некоторых содержательных интерпретаций, в данной работе термин “сложность” более уместен.

Определение 2.3. Анонимный функционал стоимости назовем однородным, если для любых величин $x, C_1, \mathbf{K}, C_k, C \geq 0$, $C \geq \max(C_1, \mathbf{K}, C_k)$ выполнено $P(xC_1, \mathbf{K}, xC_k, xC) = j(x)P(C_1, \mathbf{K}, C_k, C)$, где $j(\cdot)$ – произвольная функция, $j(0) = 0$, $j(x) > 0$ при $x > 0$.

Для функции сложности вида (2.2) однородность функционала гарантирует независимость оптимальных графов организации от масштаба сложностей элементов $C(a)$, $a \in N$, то есть от того, в каких “единицах” выражена сложность. Другими словами, при умножении $C(a)$ на константу $x > 0$, одинаковую для любого $a \in N$, стоимость всех иерархий умножится на $j(x) > 0$. Таким образом, требование однородности выглядит вполне разумным с содержательной точки зрения. Далее в этом параграфе приводятся примеры однородных функционалов.

Определение 2.4. Анонимный функционал стоимости назовем корректным в нуле, если для любых $0 \leq C \leq C'$ выполнено $P(C, 0, \mathbf{K}, 0, C') = 0$, то есть стоимость организации какой-либо группы с группами нулевой сложности равна нулю.

Если функционал не корректен в нуле, то стоимость “присоединения” подгрупп нулевой сложности может не равняться нулю. Содержательно это соответствует, например, некоторым начальным затратам, присутствующим при организации любой группы, независимо от ее сложности. Рассмотрим следующие варианты функционала стоимости:

$$(I) \quad P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k)) = [C(g_1) + \mathbf{K} + C(g_k) - \max(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k))]^b;$$

$$(II) \quad P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k)) = [C(g_1) + \mathbf{K} + C(g_k)]^b;$$

$$(III) \quad P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k), C(g)) = [C(g) / \max(C(g_1), \dots, C(g_k)) - 1]^b;^1$$

$$(IV) \quad P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k), C(g)) = [\sum_{i=1, k} C(g) - C(g_i)]^b,$$

где группа $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ организуется из подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, $b \in (0; +\infty)$ – параметр функционала.

¹ Ниже считаем, что если $\max(C(g_1), \dots, C(g_k)) = 0$, то значение функционала (III) равно $+\infty$ независимо от значения $C(g)$. То есть расширим область значений функционала бесконечной точкой.

Функционалы (I)-(IV) были предложены, исходя из возможных содержательных интерпретаций¹.

Очевидно, что функционалы (I)-(IV) однородны, то есть не зависят от масштаба сложности.

Функционал (I) корректен в нуле и монотонен. Стоимость организации определяется суммой сложностей подгрупп, организуемых с самой сложной.

Функционал (II) монотонен, но не корректен в нуле. Стоимость организации определяется суммой сложностей организуемых подгрупп.

Функционал (III) корректен в нуле при функции сложности вида (2.2), но не монотонен. Стоимость организации – относительный показатель – определяется отношением сложности группы к максимальной сложности подгруппы.

¹ Содержательно функционалы (I)-(IV) описывают затраты руководителя (менеджера) на управление группой. Основой для исчисления затрат служит "сложность" элемента группы, содержательно описывающая сложность или объем выполняемой им работы (ее также можно соотнести с квалификацией работника). Различные виды функционалов соответствуют нескольким "типовым" видам внутригруппового взаимодействия и взаимодействия руководителя и управляемой им группы. Эти виды взаимодействия описаны во многих работах по менеджменту на качественном уровне (см., например, [47, 53, 55]). Введенные функционалы позволяют количественно измерять затраты руководителя на управление группой.

Так, функционал (I) соответствует группе с "полулидером" [50], который не требует затрат на руководство собой. Таким образом, затраты определяются суммой сложностей всех элементов группы, за исключением "полулидера", то есть максимально "сложного" элемента.

Функционал (II) соответствует группе без лидера, в которой все затраты на координацию берет на себя управляющий центр. То есть его затраты определяются суммой сложностей всех элементов группы.

Функционал (III) соответствует группе с лидером, конструктивная роль которого приводит к снижению затрат управляющего центра на координацию взаимодействия [49]. Чем больше сложность лидера, тем больше координирующих функций он может взять на себя, снизив тем самым затраты управляющего центра.

Функционал (IV) соответствует затратам в процессе индивидуальной работы руководителя с членами группы [54] (например, при обучении). Затраты определяются разностями между сложностью результата групповой деятельности (соизмеримой со "сложностью" руководителя) и сложностями элементов (подгрупп).

Функционал (IV) не корректен в нуле и не монотонен. Стоимость организации – абсолютный показатель – определяется разностью между сложностью группы и сложностями подгрупп.

Разработанный в главе I аппарат далее в этом параграфе используется для поиска оптимальных организаций при функционалах (I)-(IV). Для доказательства соответствующих утверждений используются следующие неравенства:

$$(2.3) (x_1 + \dots + x_n)^g \geq x_1^g + \dots + x_n^g \text{ для любых } x_1 \geq 0, \mathbf{K}, x_n \geq 0 \text{ при } g \geq 1,$$

$$(2.4) (x_1 + \dots + x_n)^g \leq x_1^g + \dots + x_n^g \text{ для любых } x_1 \geq 0, \mathbf{K}, x_n \geq 0 \text{ при } g \leq 1.$$

Неравенства (2.3) и (2.4) представляют собой частный случай неравенства Минковского (см., например, [40]).

2. Вид оптимальной организации для функционала (I).

Утверждение 2.6. Функционал (I) при $b \leq 1$ – вогнутый, при $b \geq 1$ – выпуклый, а при функции сложности вида (2.2) и $b \geq 1$, $ab \geq 1$ – существенно выпуклый.

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенствах определения 1.30.

Пусть $b \leq 1$. Рассмотрим произвольное разбиение набора $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$, $1 < i < k$, $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$. Введем обозначения $x_j = C(h_j)$, $x = \max(x_j)$, $j = \overline{1, i}$, $y_s = C(h_s)$, $y = \max(y_s)$, $s = \overline{i+1, k}$, $X = x_1 + \mathbf{K} + x_i$, $Y = y_{i+1} + \mathbf{K} + y_k$. Тогда $P_1 = (X + Y - \max(x, y))^b$, $P_2 = (X - x)^b + (C(h) + Y - \max(y, C(h)))^b$. При $b \leq 1$ в силу (2.4) $P_2 \geq (X + Y + C(h) - x - \max(y, C(h)))^b$. Для доказательства неравенства $P_1 \leq P_2$ осталось показать, что $x + \max(y, C(h)) \leq C(h) + \max(x, y)$. При $y \leq C(h)$ неравенство, очевидно, выполнено. При $y > C(h)$ неравенство переписывается в виде $x + y \leq C(h) + \max(x, y)$, что выполнено в силу $x \leq C(h)$ (сложность монотонна). Таким образом, при $b \leq 1$ выполнено $P_1 \leq P_2$, то есть неравенство б) определения 1.30. Следовательно, функционал (I) – вогнутый.

Пусть $b \geq 1$. Обозначим $x_i = C(g_i)$, $i = \overline{1, k}$. Без ограничения общности считаем, что $x_1 = \max(x_1, \mathbf{K}, x_k)$.¹ Положим $\{h_1, h_2\} = \{g_1, g_2\}$, $\{h_3, \mathbf{K}, h_k\} = \{g_3, \mathbf{K}, g_k\}$. Имеем $P_1 = (x_2 + \mathbf{K} + x_k)^b$, $P_2 = x_2^b + (x_3 + \mathbf{K} + x_k)^b$. В силу (2.3) при $b \geq 1$ выполнено $P_1 \geq P_2$, то есть неравенство а) определения 1.30. Следовательно, функционал (I) – выпуклый.

Пусть функция сложности имеет вид (2.2) и $b \geq 1$, $ab \geq 1$. Рассмотрим набор неэлементарных групп $\{g_1, g_2\}$. Пусть $C(g_1) \leq C(g_2)$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенстве а) определения 1.32: $P_1 = P(g_1, g_2)$, для $a \in g_1$ $P_2 = P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) + P((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2, \{a\})$. Обозначим $x = C(g_1)$, $y = C(g_1 \setminus \{a\})$, $z = C(\{a\})$. Имеем $P_1 = x^b$, $P_2 = y^b + z^b$. Неравенство $P_1 \geq P_2$ с учетом $x = (y^{1/a} + z^{1/a})^a$ имеет вид: $(y^{1/a} + z^{1/a})^{ab} \geq (y^{1/a})^{ab} + (z^{1/a})^{ab}$. Последнее выполнено в силу (2.3) при $ab \geq 1$. В случае $C(g_1) \geq C(g_2)$ выполнение неравенства б) определения 1.32 доказывается аналогично с точностью до замены g_1 на g_2 . Следовательно, функционал (I) – существенно выпуклый. Утверждение доказано.

Утверждение 2.7. Последовательные организации одной группы f , в которых на первом месте стоит² элемент максимальной сложности, оптимальны на $O_p(f)$ при функционале (I).

Доказательство. Рассмотрим произвольную организацию $G \in O_p(f)$. Введем величину $P_{\min} = C(\{a_1\})^b + \mathbf{K} + C(\{a_n\})^b - \max(C(\{a_1\}), \mathbf{K}, C(\{a_n\}))^b$ и покажем, что $P(G) \geq P_{\min}$. В G элементы расположены в некотором порядке $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_n}$ (см. опр. 1.33). Обозначим $g_j = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $C_j = C(\{a_{i_j}\})$, $j = \overline{1, n}$. Если для $j = \overline{1, n-1}$ выполнено $C(g_j) \geq C_{j+1}$, то $P(G) = C_2^b + \mathbf{K} + C_n^b$, то есть $P(G) \geq P_{\min}$. Иначе найдем минимальное k , для которого $C(g_k) < C_{k+1}$. Тогда $C(g_j) \geq C_{j+1}$ при $j = \overline{1, k-1}$. Следовательно, в

¹ Иначе можно изменить нумерацию групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$.

² См. опр. 1.33.

$P(G)$ входит величина $P_1 = \sum_{j=\overline{2,k+1}} P(Q_G(g_j)) = C_2^b + \mathbf{K} + C_k^b + C(g_k)^b$. В силу монотонности сложности для $j = \overline{1,k}$ выполнено $C_j \leq C(g_k) < C_{k+1}$. Поставим $a_{i_{k+1}}$ на первое место, порядок остальных элементов сохраним. Получим последовательную организацию G' . При этом стоимость организации групп $g_2, \mathbf{K}, g_{k+1}$ изменится на стоимость организации соответствующих групп $g'_2, \mathbf{K}, g'_{k+1}$. То есть в $P(G')$ вместо величины P_1 будет входить величина $P_2 = \sum_{j=\overline{2,k+1}} P(Q_{G'}(g'_j)) = C_1^b + \mathbf{K} + C_k^b$. $P(G) - P(G') = P_1 - P_2 = C(g_k)^b - C_1^b \geq 0$. В G' k увеличилось по крайней мере на единицу, $P(G') \leq P(G)$. Продолжая такие действия с G' вместо G , в итоге придем к последовательной организации G^* , для которой $C(g_j) \geq C_{j+1}$ при $j = \overline{1, n-1}$. Таким образом, для любой организации $G \in O_p(f)$ выполнено $P(G) \geq P(G^*) = C_2^b + \mathbf{K} + C_n^b \geq P_{\min}$. Если на первом месте в последовательной организации стоит элемент с максимальной сложностью, то стоимость организации равна $P_{\min}$, то есть она оптимальна. Утверждение доказано.

В результате по поводу решения задачи об оптимальной организации одной группы f для функционала (I) можно сделать следующие выводы:

- а. На $O_p(f)$ решением будет любая последовательная организация, в которой на первом месте стоит элемент максимальной сложности (см. утв. 2.7), то есть задача на этом множестве решена аналитически.
- б. При $b \geq 1$, $ab \geq 1$ и функции сложности вида (2.2) функционал существенно выпуклый (см. утв. 2.6). Тогда (см. теор. 1.8) решение на $O_p(f)$ будет решением и на $O(f)$, $\tilde{O}(f)$, $O_r(f)$, $\tilde{O}_r(f)$, то есть в силу пункта а) задача на этих множествах решена аналитически.
- с. При $b \geq 1$ функционал выпуклый (см. утв. 2.6). С учетом монотонности решение на $D_2(f)$ будет решением и на $O(f)$, $\tilde{O}(f)$, $O_r(f)$, $\tilde{O}_r(f)$ (см. следствие 2 к теор. 1.5), то есть задача

на этих множествах решается с помощью алгоритмов поиска оптимального 2-дерева (см. гл. III).

- d. При $b \leq 1$ функционал вогнут (см. утв. 2.6), следовательно (см. теор. 1.6 и следствие) всеерная организация оптимальна на $O(f)$ и $\tilde{O}(f)$, то есть задача на этих множествах решена аналитически. В силу монотонности решение на $D_r(f)$ будет решением и на $O_r(f)$ (см. следствие к теор. 1.4), то есть задача на этих множествах решается с помощью алгоритмов поиска оптимального r -дерева (см. гл. III).

Таким образом, задача об оптимальной организации одной группы для функционала (I) во многих случаях решена аналитически, в остальных случаях решается с помощью алгоритмов поиска оптимального r -дерева.

По поводу решения задачи об оптимальной организации произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ для функционала (I) можно сделать следующий вывод. При $b \geq 1$, $ab \geq 1$ и функции сложности вида (2.2) функционал существенно выпуклый (см. утв. 2.6), следовательно (см. теор. 1.8) решение задачи на $O_p(\mathbf{f})$ будет решением и на $O(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$, то есть задача на этих множествах решается с помощью алгоритмов поиска оптимальной последовательной организации (см. гл. IV).

На рис. 2.5 полученные результаты для функционала (I) и функции сложности вида (2.2) изображены схематично. По горизонтальной оси отложено значение a , по вертикальной – значение b . При $b \leq 1$ – область с вертикальной штриховкой – на $O(f)$ оптимальна всеерная организация одной группы (функционал – вогнутый). При $b \geq 1$ – область с перекрестной штриховкой – на $O(\mathbf{f})$ оптимальна 2-организация произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ (функционал – выпуклый). При $b \geq 1$, $ab \geq 1$ – область с горизонтальной штриховкой – результат усиливается. В этом случае на $O(\mathbf{f})$ оптимальна последовательная организация. Если набор $\mathbf{f} = \{f\}$ состоит из одной группы, то на $O(f)$ оптимальна последовательная организация, в которой на первом месте стоит элемент максимальной сложности, остальные

расположены в любом порядке (правая часть графа в области с горизонтальной штриховкой).

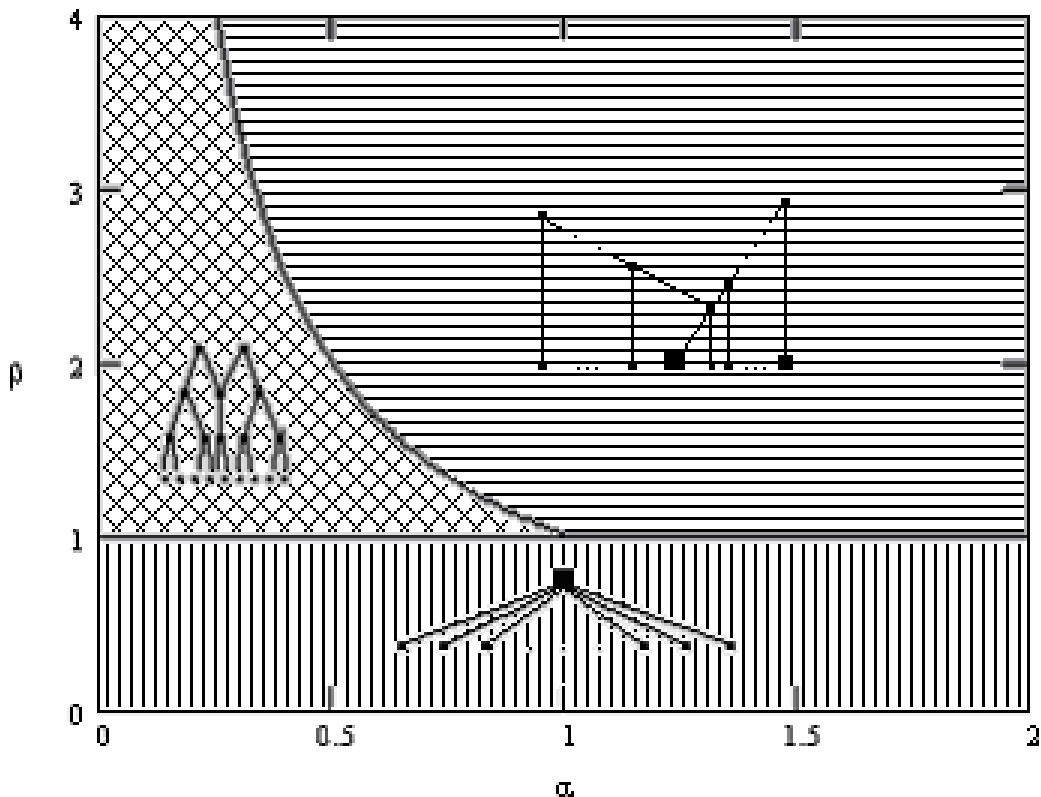


Рис. 2.5. Оптимальные организации для функционала (I).

3. Вид оптимальной организации для функционала (II).

Утверждение 2.8. Функционал (II) при $b \leq 1$ вогнут, а при функции сложности вида (2.2) и $b > 1$, $a \geq 1$ вогнут на наборах непересекающихся групп¹.

Доказательство. Рассмотрим набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и его произвольное разбиение на поднаборы $\{h_1, \mathbf{K}, h_i\}$ и $\{h_{i+1}, \mathbf{K}, h_k\}$, $1 < i < k$, $h = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_i$. Обозначим через P_1 левую, через P_2 – правую часть в неравенствах определения 1.30. Обозначим $X = C(h_1) + \mathbf{K} + C(h_i)$, $Y = C(h_{i+1}) + \mathbf{K} + C(h_k)$, тогда $P_1 = (X + Y)^b$, $P_2 = X^b + (C(h) + Y)^b$. При $b \leq 1$ в силу (2.4) $P_1 \leq X^b + Y^b \leq P_2$.

¹ В случае $b > 1$, $a \geq 1$ можно подобрать пересекающиеся группы, при которых нарушается неравенство б) в опр. 1.30, а при $a < 1$, $b > 1$ можно подобрать и непересекающиеся группы, обладающие тем же свойством. То есть утверждение неулучшаемо.

Если среди $h_1, \mathbf{K}, h_i$ нет пересекающихся групп и функция сложности имеет вид (2.2), то $C(h) = (C(h_1)^{1/a} + \mathbf{K} + C(h_i)^{1/a})^a$. При $a \geq 1$ в силу (2.3) $C(h) \geq X$, следовательно $P_2 \geq (X + Y)^b = P_1$. Утверждение доказано.

Утверждение 2.9. Последовательная организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности¹, оптимальна на $O_p(f)$ при функционале (II) с функцией сложности вида (2.2) и параметрами $b \leq 1$ или $b > 1, a \geq 1$.²

Доказательство. Рассмотрим оптимальную на $O_p(f)$ организацию G . В G элементы расположены в некотором порядке $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_n}$. Обозначим $g_j = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $C_j = C(\{a_{i_j}\})$, $j = \overline{1, n}$. Пусть для некоторого k $C_k > C_{k+1}$. Поменяем местами a_{i_k} и $a_{i_{k+1}}$. Получим последовательную организацию G' . Если $k=1$, то $P(G') = P(G)$. Иначе в $P(G)$ входила величина $P_1 = (C(g_{k-1}) + C_k)^b + (C(g_{k-1} \cup \{a_{i_k}\}) + C_{k+1})^b$. Вместо P_1 в $P(G')$ входит величина $P_2 = (C(g_{k-1}) + C_{k+1})^b + (C(g_{k-1} \cup \{a_{i_{k+1}}\}) + C_k)^b$. Обозначим $z = C(g_{k-1})^{1/a}$, $x = C_k^{1/a}$, $y = C_{k+1}^{1/a}$. Тогда $x > y$, $P_1 = (z^a + x^a)^b + ((z+x)^a + y^a)^b$, $P_2 = (z^a + y^a)^b + ((z+y)^a + x^a)^b$.

Первое слагаемое P_2 не превосходит первого слагаемого P_1 . Докажем, что при $a \geq 1$ для вторых слагаемых выполняется то же. Для этого достаточно показать неотрицательность величины $x = (z+x)^a + y^a - (z+y)^a - x^a$. Рассмотрим x как функцию z . Тогда $x(0) = 0$, $x'(z) = a(z+x)^{a-1} - a(z+y)^{a-1}$. При $a \geq 1$ с учетом $x > y$ имеем $x'(z) \geq 0$. Следовательно, $x(z)$ монотонно не убывает. Имеем $x(z) \geq 0$, то есть $P_2 \leq P_1$.

Остался случай $a < 1, b \leq 1$. Для доказательства неравенства $P_1 \geq P_2$ рассмотрим разность этих величин как функцию от y и покажем ее неотрицательность:

¹ См опр. 1.33.

² При $a < 1, b > 1$ можно привести пример, при котором утверждение неверно. То есть оно неулучшаемо.

$$x(y) = (z^a + x^a)^b - (z^a + y^a)^b + ((z+x)^a + y^a)^b - ((z+y)^a + x^a)^b$$
 Вычислим производную: $x'(y) = ab(-(z^a + y^a)^{b-1}y^{a-1} + ((z+x)^a + y^a)^{b-1}y^{a-1} - ((z+y)^a + x^a)^{b-1}(z+y)^{a-1})$. Первое слагаемое по модулю не меньше второго в силу $z^a + y^a < (z+x)^a + y^a$ и условия $b \leq 1$. Следовательно, $x'(y) \leq 0$. Выполнено $x(0) > 0$, $x(x) = 0$, то есть функция $x(y)$ монотонно убывает до нуля при увеличении y от нуля до x . Имеем $x(y) \geq 0$, то есть $P_2 \leq P_1$.

Итак, при условиях утверждения $P_2 \leq P_1$, следовательно $P(G') \leq P(G)$ и организация G' оптимальна. Продолжая такие перестроения, получим в итоге оптимальную на $O_p(f)$ организацию, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности. Утверждение доказано.

В результате по поводу решения задачи об оптимальной организации одной группы f для функционала (II) можно сделать следующие выводы:

- а. На $O_p(f)$ при функции сложности вида (2.2) и $b \leq 1$ или $b > 1$, $a \geq 1$ решением будет последовательная организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности (см. утв. 2.9), то есть задача на этом множестве решена аналитически.
- б. При $b \leq 1$ или при функции сложности вида (2.2) и $b > 1$, $a \geq 1$ функционал вогнут (см. утв. 2.8), следовательно в силу монотонности (см. теор. 1.6 и следствие) веерная организация оптимальна на $O(f)$, $\tilde{O}(f)$, то есть задача на этих множествах решена аналитически.
- с. В силу монотонности решение на $D(f)$ и $D_r(f)$ будет соответственно решением на $O(f)$ и $O_r(f)$ (см. теор. 1.4 и следствие), то есть задача на этих множествах решается с помощью алгоритмов поиска оптимальных деревьев (см. гл. III).
- д. При функции сложности вида (2.2) и $a = 1$, $b = 1$ функционал (II) совпадает с функционалом (2.1) (см. п.2 §1), если положить $C(a_i) = p_i$. Условие $\sum_{i=1, n} p_i = 1$ не ограничивает общности, так как (II) однороден (см. опр. 2.3) и решение задачи об

оптимальной иерархии не зависит от масштаба сложностей. То есть при произвольных сложностях элементов можно положить $p_i = C(a_i)/(C(a_1) + \mathbf{K} + C(a_n))$. Таким образом, функционал (II) описывает, в частности, алфавитное кодирование. В силу монотонности решение на $D_r(f)$ будет решением и на $O_r(f)$, то есть задача на этих множествах решается с помощью алгоритмов теории кодирования со сложностью порядка $n \log n$ (см. п.2 §1). Априори представляется разумным использовать эти алгоритмы и в качестве эвристических при $a \neq 1$ или $b \neq 1$.

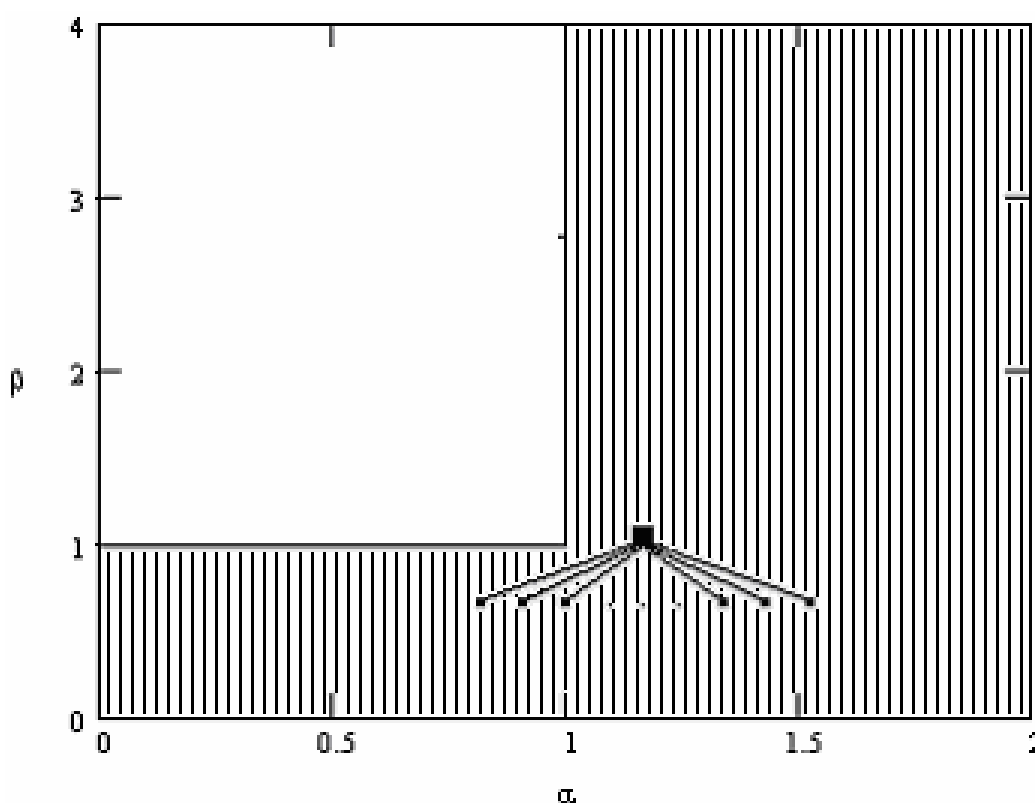


Рис. 2.6. Оптимальная организация для функционала (II).

На рис. 2.6 полученные результаты для функционала (II) и функции сложности вида (2.2) изображены схематично. По горизонтальной оси отложено значение a , по вертикальной – значение b . В случае $b \leq 1$ или $b > 1$, $a \geq 1$ – область с вертикальной штриховкой – на $O(f)$ оптимальна веерная организация одной группы (функционал – вогнутый). В этой же области на $O_p(f)$ оптимальна последовательная организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности

(от “меньшего” к “большему”). При $a < 1$, $b > 1$ – белая область – функционал не является ни выпуклым, ни вогнутым¹. Аналитическое решение задачи в этой области на данный момент отсутствует. В пункте 3 §1 главы III (см. рис. 3.5) приведен пример использования алгоритмических методов решения, из которого можно сделать вывод, что в вышеуказанной области оптимальная организация ведет себя сложным образом при изменении параметров a и b .

4. Вид оптимальной организации для функционала (III).

Утверждение 2.10. Функционал (III) – существенно выпуклый при $b \geq 1$.²

Доказательство. Сначала докажем выпуклость. Рассмотрим произвольный набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \geq 3$ и его разбиение на поднаборы $\{h_1, h_2\} = \{g_1, g_2\}$, $\{h_3, \mathbf{K}, h_k\} = \{g_3, \mathbf{K}, g_k\}$. Без ограничения общности считаем $C(g_1) = \max(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k))$.³ Обозначим $h = h_1 \cup h_2$; $x = C(g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k)$; $y = C(h)$; $z = C(h_1)$. Сложность монотонна, следовательно $z \leq y \leq x$. Через P_1 обозначим левую, через P_2 – правую часть в неравенствах определения 1.30. Тогда $P_1 = (x/z - 1)^b$, $P_2 = (y/z - 1)^b + (x/y - 1)^b \leq (y/z - 1 + x/y - 1)^b$ в силу (2.3) и $b \geq 1$.⁴ Для доказательства неравенства $P_2 \leq P_1$ достаточно показать, что:
 $x/z - 1 - y/z + 1 - x/y + 1 = (xy + yz - y^2 - xz)/yz = (x - y)(y - z)/yz \geq 0$,
 что, очевидно, верно. Таким образом, функционал (III) – выпуклый.

Рассмотрим набор неэлементарных групп $\{g_1, g_2\}$. Пусть $C(g_1) \leq C(g_2)$. Обозначим $x = C(g_1 \cup g_2)$, $z = C(g_2)$, P_1 и P_2 –

¹ Можно подобрать сложности, при которых нарушаются оба неравенства в опр. 1.30.

² При $b < 1$ можно подобрать сложности, при которых нарушается неравенство а) в опр. 1.30. То есть утверждение неулучшаемо.

³ Иначе можно изменить нумерацию групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$.

⁴ При $z = 0$ $P_1 = +\infty$ по определению функционала (III), следовательно выполнено неравенство $P_1 \geq P_2$. Далее считаем $z > 0$.

соответственно левая и правая части неравенства а) определения 1.32. Имеем $P_1 = P(g_1, g_2) = (x/z - 1)^b$. Рассмотрим $a \in g_1$, тогда $P_2 = P(g_1 \setminus \{a\}, g_2) + P((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2, \{a\})$. Обозначим $y = C((g_1 \setminus \{a\}) \cup g_2)$, тогда $P_2 = (y/z - 1)^b + (x/y - 1)^b$. Выше было показано, что $P_1 \geq P_2$ при $z \leq y \leq x$, что выполнено в силу монотонности функции сложности. В случае $C(g_1) \geq C(g_2)$ выполнение неравенства б) определения 1.32 доказывается аналогично с точностью до замены g_1 на g_2 . Следовательно, функционал (III) – существенно выпуклый. Утверждение доказано.

Докажем две вспомогательные леммы и утверждение 2.11 с целью выяснения вопроса об оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации одной группы для функционала (III).

Лемма 2.2. При функционале (III) с функцией сложности вида (2.2) существует оптимальная на $O_p(f)$ последовательная организация одной группы f , в которой элементы расположены в таком порядке $a_{i_1}^*, \mathbf{K}, a_{i_n}^*$ ¹, что при $k = \overline{1, n-1}$ выполнено $C(\{a_{i_{k+1}}^*\}) \leq C(\{a_{i_1}^*, \mathbf{K}, a_{i_k}^*\})$.

Доказательство. Пусть $G \in O_p(f)$ – оптимальная на $O_p(f)$ организация с порядком элементов $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_n}$. Обозначим $g_j = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $y_j = C(g_j)$, $C_j = C(\{a_{i_j}\})$, $j = \overline{1, n}$. Найдем минимальное k , для которого $y_k < C_{k+1}$. Если такого k нет, то G – искомая организация. Иначе для $j = \overline{1, k-1}$ выполнено $y_j \geq C_{j+1}$. Обозначим $x = C_{k+1}^{1/a}$. В $P(G)$ входит величина $P_1 = \sum_{j=\overline{2, k+1}} P(Q_G(g_j)) = (y_2/y_1 - 1)^b + (y_3/y_2 - 1)^b + \mathbf{K} + (y_k/y_{k-1} - 1)^b + ((x + y_k^{1/a})^a / x^a - 1)^b$. Переставим элемент $a_{i_{k+1}}$ на первое место, порядок остальных сохраним. Получим последовательную организацию G' . С учетом монотонности сложности выполнено $C_{k+1} > y_k \geq y_j \geq C_j$ для

¹ См. опр. 1.33.

$j = \overline{1, k}$. Следовательно, вместо P_1 в $P(G')$ входит следующая величина: $P_2 = ((x + y_1^{1/a})^a / x^a - 1)^b + ((x + y_2^{1/a})^a / (x + y_1^{1/a})^a - 1)^b + \mathbf{K} + ((x + y_k^{1/a})^a / (x + y_{k-1}^{1/a})^a - 1)^b$.

Покажем, что $P_2 \leq P_1$ индукцией по k . При $k=1$ выполнено $P_2 = P_1$. Обозначим P_1 и P_2 при $k=q$ через $P_1(q)$ и $P_2(q)$. Предположим, что выполнено $P_2(q) \leq P_1(q)$. Докажем, что $P_2(q+1) \leq P_1(q+1)$. Можно записать $P_2(q+1) = P_2(q) + ((x + y_{q+1}^{1/a})^a / (x + y_q^{1/a})^a - 1)^b$, $P_1(q+1) = P_1(q) + ((x + y_{q+1}^{1/a})^a / x^a - 1)^b - ((x + y_q^{1/a})^a / x^a - 1)^b + (y_{q+1} / y_q - 1)^b$. Обозначим $y = y_{q+1}^{1/a}$, $z = y_q^{1/a}$, тогда выполнено $z \leq y$.¹ Необходимо показать:

$((x + y)^a / (x + z)^a - 1)^b \leq ((x + y)^a / x^a - 1)^b - ((x + z)^a / x^a - 1)^b + (y^a / z^a - 1)^b$,
 $((x + z)^a / x^a - 1)^b + ((x + y)^a / (x + z)^a - 1)^b \leq ((x + y)^a / x^a - 1)^b + (y^a / z^a - 1)^b$.
Первое слагаемое слева не превосходит первого справа в силу $z \leq y$. Неравенство для вторых слагаемых можно записать следующим образом $(x + y) / (x + z) \leq y / z$. Упростим выражение: $xz + yz \leq xy + zy$, что выполнено в силу $z \leq y$.

Итак, $P_2 \leq P_1$, следовательно G' оптимальна на $O_p(f)$. Рассмотрим G' вместо G . Тогда $y_j \geq C_{j+1}$ при $j = \overline{1, k}$. Повторяя при необходимости вышеуказанные действия с числом $k' > k$, в итоге придем в искомой организации. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Для произвольных величин $1 \leq u \leq v$ при $b \geq 1$ и $a \geq 1$ ² выполнено неравенство:

$$(u^a - 1)^b + ((1 + (v - 1) / u)^a - 1)^b \leq (v^a - 1)^b + ((1 + (u - 1) / v)^a - 1)^b.$$

Доказательство. Рассмотрим разность правой и левой частей как функцию от u : $f(u) = (v^a - 1)^b - (u^a - 1)^b + ((1 + (u - 1) / v)^a - 1)^b - ((1 + (v - 1) / u)^a - 1)^b$. Тогда выполнено $f(1) = f(v) = 0$. Докажем вогнутость функции $f(u)$, то есть

¹ При $z = 0$ последнее слагаемое P_1 равно $+\infty$ по определению функционала (III), следовательно выполнено неравенство $P_1 \geq P_2$. Ниже считаем $z > 0$.

² Для $b = 1$ и $b = 2$ лемма доказывается элементарными преобразованиями при произвольном $a > 0$. Численные эксперименты подтверждают выполнение леммы при $b \geq 1$ независимо от значения $a > 0$. То есть можно предположить справедливость леммы при $0 < a < 1$, но строго эта гипотеза не доказана.

неравенство $f''(u) \leq 0$ при $1 < u < v$. В этом случае $f(u)$ лежит не ниже оси абсцисс, то есть $f(u) \geq 0$ и неравенство доказано. Вычислим первую производную:

$$f'(u) = -ab(u^a - 1)^{b-1}u^{a-1} + ab((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{b-1}(1 + (u-1)/v)^{a-1}/v + \\ + ab((1 + (v-1)/u)^a - 1)^{b-1}(1 + (v-1)/u)^{a-1}(v-1)/u^2$$

Множитель ab не влияет на знак второй производной. Игнорируя его, вычислим вторую производную и проведем некоторые преобразования. Получим:

$$f''(u) = a(b-1)[((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{b-2}(1 + (u-1)/v)^{2a}/(u+v-1)^2 - \\ - (u^a - 1)^{b-2}u^{2a}/u^2 - ((1 + (v-1)/u)^a - 1)^{b-2}(1 + (v-1)/u)^{2(a-1)}(v-1)^2/u^4] + \\ + (a-1)[((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{b-1}(1 + (u-1)/v)^a/(u+v-1)^2 - (u^a - 1)^{b-1}u^a/u^2 - \\ - ((1 + (v-1)/u)^a - 1)^{b-1}(1 + (v-1)/u)^{a-2}(v-1)^2/u^4] - \\ - 2[((1 + (v-1)/u)^a - 1)^{b-1}(1 + (v-1)/u)^{a-1}(v-1)/u^3]$$

Рассмотрим вторую квадратную скобку и первые два ее слагаемых. Выполнено $u > 1 + (u-1)/v$ в силу $1 < u < v$. Таким образом, при $b \geq 1$ второе слагаемое по модулю не меньше первого. Третье слагаемое неположительно. То есть неположительна вся вторая квадратная скобка. В силу $a \geq 1$ положительной в выражении для $f''(u)$ может быть только первая квадратная скобка. Покажем, что ее первое слагаемое по модулю меньше второго, чем докажем лемму. Соответствующее неравенство имеет вид:

$$((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{b-2}(1 + (u-1)/v)^{2a}/(u+v-1)^2 \leq (u^a - 1)^{b-2}u^{2a}/u^2$$

Можно переписать:

$$((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{b-1}((1 + (u-1)/v)^a - 1)^{-1}(1 + (u-1)/v)^{2a}/(u+v-1)^2 \leq \\ \leq (u^a - 1)^{b-1}(u^a - 1)^{-1}u^{2a}/u^2$$

В силу $b \geq 1$ и $u > 1 + (u-1)/v$ первая скобка слева не превосходит первой справа. Сократим неравенство и проведем некоторые преобразования. Получим:

$$\frac{u^a - 1}{u^{2a}} \leq \frac{(1 + (u-1)/v)^a - 1}{(1 + (u-1)/v)^{2a}} \left(\frac{u+v-1}{u} \right)^2$$

Проведем замену $x = u$, $y = 1 + (u-1)/v$. Тогда $1 < y < x$ и $(u+v-1)/u = (x-1)y/[(y-1)x]$, получим:

$$(x^a - 1)/[x^{2(a-1)}(x-1)^2] \leq (y^a - 1)/[y^{2(a-1)}(y-1)^2].$$

Рассмотрим левую часть как функцию $g(\cdot)$ от x . Справа стоит такая же функция от y . С учетом $1 < y < x$ осталось показать невозрастание $g(x)$ при $x \geq 1$. Вычислим производную:

$$g'(x) = [ax^{3(a-1)}(x-1)^2 - 2(a-1)x^{2(a-1)-1}(x^a-1)(x-1)^2 - 2(x-1)x^{2(a-1)}(x^a-1)]/[x^{2(a-1)}(x-1)^2]^2 \leq 0$$

Сократив в полученном неравенстве знаменатель и множитель $(x-1)x^{2(a-1)-1}$, будем иметь: $ax^a(x-1) - 2(a-1)(x^a-1)(x-1) - 2x(x^a-1) \leq 0$ или $x^a[a(1-x) - 2] + 2a(x-1) + 2 \leq 0$. Преобразуем: $a(x-1)(2-x^a) \leq 2(x^a-1)$. Выполнено $2-x^a \leq 1$, тогда, сократив неравенство, получим $a(x-1) \leq 2(x^a-1)$. Рассмотрим разность правой и левой частей как функцию $h(\cdot)$ от x . Тогда $h(1) = 0$ и $h'(x) = a(2x^{a-1}-1) \geq 0$ в силу $a \geq 1$ и $x \geq 1$. Таким образом, $h(x) \geq 0$, что и доказывает неравенство $g'(x) \leq 0$. Лемма доказана.

Утверждение 2.11. При функционале (III) с функцией сложности вида (2.2) и $b \geq 1$, $a \geq 1$ ¹ среди последовательных организаций, в которых второй и последующие элементы расположены в порядке неубывания сложности², найдется организация, оптимальная на $O_p(f)$.

Доказательство. Пусть $G \in O_p(f)$ – оптимальная на $O_p(f)$ организация с порядком элементов $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_n}$, удовлетворяющим условиям леммы 2.2. Обозначим $y_j = C(\{a_{i_j}, \mathbf{K}, a_{i_j}\})$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $P(G) = (y_2 / y_1 - 1)^b + \mathbf{K} + (y_n / y_{n-1} - 1)^b$. Пусть в G для некоторого $j = \overline{2, n-1}$ имеет место $C(\{a_{i_j}\}) > C(\{a_{i_{j+1}}\})$. Обозначим $x = C(\{a_{i_j}\})^{1/a}$, $y = C(\{a_{i_{j+1}}\})^{1/a}$. Поменяем местами $\{a_{i_j}\}$ и $\{a_{i_{j+1}}\}$, чем изменим лишь два слагаемых в $P(G)$. Получим последовательную организацию G' . При этом в силу

¹ Условия $b \geq 1$ и $a \geq 1$ необходимы лишь для выполнения леммы 2.3. Как отмечено в сноске к формулировке леммы 2.3, она выполнена при $b = 1$ и $b = 2$ для любых $a > 0$, что позволяет предположить справедливость леммы при $b \geq 1$ и $0 < a < 1$. Таким образом, выполнение утверждения в этой области является гипотезой.

² См. опр. 1.33.

$y_{j-1} \geq C(\{a_{i_j}\}) > C(\{a_{i_{j+1}}\})$ условие леммы 2.2 будет справедливо и после перестановки. Тогда можно записать:

$$\Delta = P(G) - P(G') = (y_j / y_{j-1} - 1)^b + (y_{j+1} / y_j - 1)^b - \\ - ((y_{j-1}^{1/a} + y)^a / y_{j-1} - 1)^b - (y_{j+1} / (y_{j-1}^{1/a} + y)^a - 1)^b$$

Обозначим $z = y_{j-1}^{1/a}$, тогда $y_j = (z + x)^a$, $y_{j+1} = (z + x + y)^a$.

Условие $\Delta \geq 0$ примет вид:

$$((z + x)^a / z^a - 1)^b + ((z + x + y)^a / (z + x)^a - 1)^b \geq \\ \geq ((z + y)^a / z^a - 1)^b + ((z + x + y)^a / (z + y)^a - 1)^b$$

Обозначим $u = 1 + y / z$, $v = 1 + x / z$.¹ Тогда $1 \leq u < v$ и неравенство примет вид:

$$(v^a - 1)^b + ((1 + (u - 1) / v)^a - 1)^b \geq (u^a - 1)^b + ((1 + (v - 1) / u)^a - 1)^b,$$

что выполнено при $b \geq 1$ и $a \geq 1$ в силу леммы 2.3. То есть $\Delta \geq 0$, следовательно $P(G') \leq P(G)$. Получили оптимальную последовательную организацию, для которой выполнены условия леммы 2.2 и неравенство $C(\{a_{i_j}\}) \leq C(\{a_{i_{j+1}}\})$. Продолжая такие действия, в итоге придем к оптимальной на $O_p(f)$ организации, в которой второй и последующие элементы расположены в порядке неубывания сложности. Утверждение доказано.

В результате по поводу решения задачи об оптимальной организации одной группы f для функционала (III) можно сделать следующие выводы:

- а. Для функции сложности вида (2.2) и $b \geq 1$, $a \geq 1$ найти организацию, оптимальную на $O_p(f)$, можно следующим образом: поставим на первое место поочередно каждый элемент, остальные расположим в порядке неубывания сложности, выберем из полученных n организаций организацию минимальной стоимости, она и будет искомой (см. утв. 2.11). То есть на $O_p(f)$ оптимальна одна из n организаций.
- б. Функционал – существенно выпуклый при $b \geq 1$ (см. утв. 2.10). Тогда (см. теор. 1.8) решение на $O_p(f)$ будет решением и на

¹ $z > 0$ в силу $z \geq x > y \geq 0$.

$O(f)$, $\tilde{O}(f)$, $O_r(f)$, $\tilde{O}_r(f)$. В силу пункта а) при функции сложности вида (2.2) и $a \geq 1$ задача на этих множествах решается путем сравнения стоимостей n организаций.

По поводу решения задачи об оптимальной организации произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ для функционала (III) можно сделать следующий вывод. Функционал – существенно выпуклый при $b \geq 1$ (см. утв. 2.10), следовательно (см. теор. 1.8) решение задачи на $O_p(\mathbf{f})$ будет решением и на $O(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$, то есть задача на этих множествах решается с помощью алгоритмов поиска оптимальной последовательной организации (см. гл. IV).

На рис. 2.7 результат утверждения 2.10 изображен схематично. По вертикальной оси отложено значение b . Значение a , отложенное по горизонтальной оси, никакой роли не играет (результат верен для любой функции сложности) и сохранено для аналогии с рис. 2.5, 2.6. При $b \geq 1$ – область с горизонтальной штриховкой – на $O(\mathbf{f})$ оптимальна последовательная организация произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ (функционал – существенно выпуклый). Если набор $\mathbf{f} = \{f\}$ состоит из одной группы, то при функции сложности вида (2.2) и $b \geq 1$, $a \geq 1$ на $O(f)$ оптимальна последовательная организация, в которой элементы, начиная со второго, расположены в порядке неубывания сложности (правая часть графа в области с горизонтальной штриховкой).

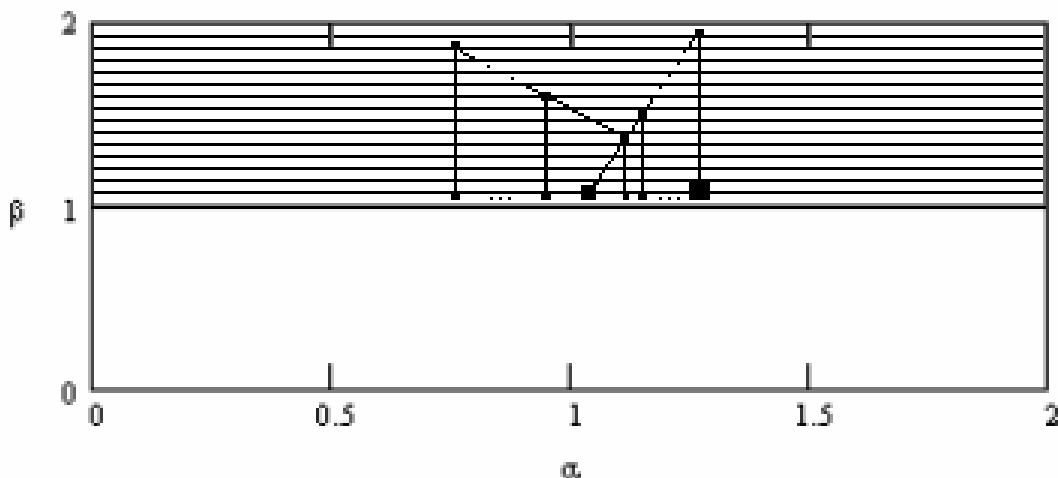


Рис. 2.7. Оптимальная организация для функционала (III).

При $b < 1$ – белая область – функционал не является ни выпуклым, ни вогнутым¹. Аналитическое решение задачи в этой области на данный момент отсутствует. В пункте 1 §1 главы III (см. рис. 3.2) приведен пример использования алгоритмических методов решения, из которого можно сделать вывод, что в вышеуказанной области оптимальная организация ведет себя сложным образом.

5. Вид оптимальной организации для функционала (IV).

Утверждение 2.12. Функционал (IV) – выпуклый при $b \geq 1$.²

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор групп $\{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и его разбиение на поднаборы $\{h_1, h_2\} = \{g_1, g_2\}$ и $\{h_3, \mathbf{K}, h_k\} = \{g_3, \mathbf{K}, g_k\}$. Обозначим $h = h_1 \cup h_2$; $y = C(h)$; $x_i = C(g_i)$, $i = \overline{1, k}$; $x = C(g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k)$; P_1 и P_2 – соответственно левая и правая части в неравенствах определения 1.30. Тогда $P_2 = (2y - x_1 - x_2)^b + ((k-1)x - y - \sum_{i=\overline{3, k}} x_i)^b$, $P_1 = (kx - \sum_{i=\overline{1, k}} x_i)^b$. Из (2.3) и $b \geq 1$ следует $P_2 \leq (2y - x_1 - x_2 + (k-1)x - y - \sum_{i=\overline{3, k}} x_i)^b$. Для доказательства неравенства $P_2 \leq P_1$ достаточно показать, что $y + (k-1)x - \sum_{i=\overline{1, k}} x_i \leq kx - \sum_{i=\overline{1, k}} x_i$. Последнее неравенство имеет вид $y \leq x$, что выполнено в силу монотонности функции сложности. Утверждение доказано.

Покажем, что функционал (IV), вообще говоря, на является существенно выпуклым при $b \geq 1$. Например, пусть $m=1$ и необходимо организовать группу $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_4\}$, функция сложности имеет вид (2.2), $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_4) = 1$, $a = 1$, $b = 1$. Тогда стоимость последовательной организации равна 9. Стоимость дерева, в котором f организуется из промежуточных

¹ Можно подобрать сложности, при которых нарушаются оба неравенства в опр.1.30.

² При $b < 1$ можно подобрать сложности, при которых нарушается неравенство а) в опр. 1.30. То есть утверждение неулучшаемо.

групп $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3, a_4\}$, равна 8. Таким образом, функционал (IV) – выпуклый, но не существенно выпуклый (см. теор. 1.8).

Утверждение 2.13. Последовательная организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности, оптимальна на $O_p(f)$ при функционале (IV) с функцией сложности вида (2.2) и $b = 1$.¹

Доказательство. Рассмотрим некоторую организацию $G \in O_p(f)$. В G элементы расположены в некотором порядке $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_n}$. Обозначим $g_j = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $C_j = C(\{a_{i_j}\})$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $P(G) = \sum_{j=\overline{2, n}} (2C(g_j) - C(g_{j-1}) - C_j) = \sum_{j=\overline{2, n-1}} C(g_j) - \sum_{j=\overline{1, n}} C_j + 2C(g_n)$. От порядка элементов зависит лишь первое слагаемое. При изменении порядка элементов a_k и a_{k+1} слагаемое $C(g_k)$ изменится на $(C(g_k)^{1/a} - C_k^{1/a} + C_{k+1}^{1/a})^a$. Если $C_k > C_{k+1}$, то стоимость $P(G)$ уменьшится. Следовательно, оптимальной на $O_p(f)$ может быть лишь организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности. Утверждение доказано.

В результате по поводу решения задачи об оптимальной организации одной группы f для функционала (IV) можно сделать следующие выводы:

- а. На $O_p(f)$ при функции сложности вида (2.2) и $b = 1$ решением будет последовательная организация, в которой элементы расположены в порядке неубывания сложности (см. утв. 2.13), то есть в этом случае задача на $O_p(f)$ решена аналитически.
- б. Функционал выпуклый при $b \geq 1$ (см. утв. 2.12), следовательно решение на $D_2(f)$ будет решением и на $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$ (см. следствие 1 к теор. 1.5), то есть задача на этих множествах

¹ Возможно, утверждение выполнено и при $b \neq 1$. Однако в общем случае оптимальная на $O_p(f)$ организация не будет оптимальна на $O(f)$ и даже на $D(f)$, что делает неактуальным громоздкое уточнение вида оптимальной последовательной организации.

решается с помощью алгоритмов поиска оптимального 2-дерева (см. гл. III).

- с. Если функция сложности имеет вид (2.2) и $a = 1$, $b = 1$, то стоимость организации двух подгрупп для функционалов (II) и (IV) совпадают. Для структурных функционалов искать оптимальное 2-дерево на $D_2(f)$ можно среди деревьев без повторяющихся групп (см. теор. 1.7). В таких деревьях каждая неэлементарная группа организуется ровно из двух подгрупп (см. лемму 1.4), то есть на $D_2(f)$ функционалы (II) и (IV) равны. Таким образом, функционал (IV), также как и (II), описывает бинарное алфавитное кодирование (см. п.2 §1 и п.3 §2). Задача на $D_2(f)$ решается с помощью алгоритма Хаффмана с порядком сложности $n \log n$ (см. п.2 §1). В силу пункта б алгоритм Хаффмана дает решение и на $\tilde{O}(f)$, $\tilde{O}_r(f)$. Априори представляется разумным использовать этот алгоритм и в качестве эвристического при $a \neq 1$ или $b \neq 1$.

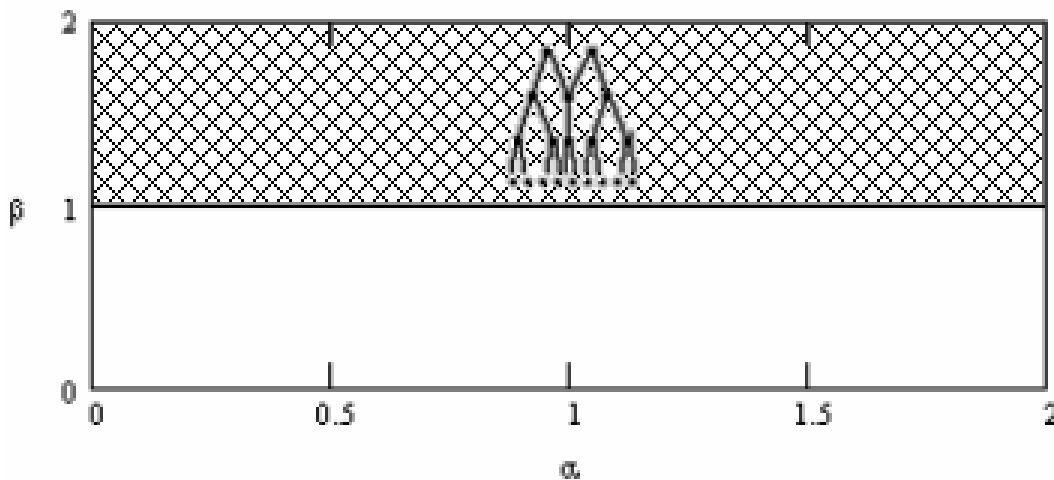


Рис. 2.8. Оптимальная организация для функционала (IV).

На рис. 2.8 результат утверждения 2.12 изображен схематично. По вертикальной оси отложено значение b . Значение a , отложенное по горизонтальной оси, никакой роли не играет (результат верен для любой функции сложности) и сохранено для аналогии с рис. 2.5, 2.6. При $b \geq 1$ – область с перекрестной штриховкой – на $O(f)$ оптимальна 2-организация произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ (функционал – выпуклый). При $b < 1$ – белая область – функционал не является ни выпуклым, ни

вогнутым¹. Аналитическое решение задачи в этой области на данный момент отсутствует. В пункте 2 §1 главы III (см. рис. 3.4) приведен пример использования алгоритмических методов решения.

Кратко подведем итоги главы II. В §1 различные частные задачи: оптимальная организация технологического взаимодействия элементов, построение оптимального алфавитного кода, построение оптимальной структуры системы управления сетью доставки материальных потоков и др. сформулированы в терминах задачи оптимизации иерархической структуры. При этом многие задачи (см. п.п.1-4 §1) описываются структурным функционалом стоимости. К таким задачам применимы рассмотренные в данной работе общие методы решения. Вполне естественно, что для конкретных задач могут существовать более эффективные частные методы. Однако универсальность общих методов позволяет проанализировать каждую новую частную задачу “в первом приближении”, а затем при необходимости учитывать ее специфику. В пунктах 4 и 5 §1 приводятся примеры задач с неструктурным функционалом стоимости, что иллюстрирует необходимость дальнейшего изучения общей задачи и в этом случае.

Соответствие выпуклости и вогнутости функционала “классическим” определениям выпуклой и вогнутой функции затрат описано в пункте 1 §1.

В пункте 2 §1 приведен пример сведения “классической” задачи дискретной оптимизации, встречающейся в теории кодирования, к общей задаче об оптимальном r -дереве организации. Сложность задачи построения оптимального дерева в общем случае не ограничена полиномом (см. гл. III). Однако пункт 2 §1 показывает, что для конкретного вида функционала (см. формулу (2.1)) существуют вполне эффективные алгоритмы решения.

В §2 определены так называемые анонимные функционалы стоимости, то есть структурные функционалы, которые зависят не от самих организуемых групп, а от некоторой их характеристики – сложности. Введены понятия однородности (независимости от

¹ Можно подобрать сложности, при которых нарушаются оба неравенства в опр.1.30.

масштаба сложности) и корректности в нуле (стоимость добавления подгруппы нулевой сложности нулевая) анонимного функционала. Исходя из возможных содержательных интерпретаций, предложены примеры однородных функционалов (I)-(IV). Функционалы (I), (II) монотонны, (III), (IV) – нет. Функционалы (I), (III) корректны в нуле, функционалы (II), (IV) – нет. Далее в §2 исследуется выпуклость, вогнутость, существенная выпуклость функционалов (I)-(IV) и из общих теорем 1.4-1.8 делаются соответствующие выводы по поводу вида оптимальной организации. Полученные результаты схематично представлены на рис. 2.5-2.8. Для ряда наборов параметров функционалы не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми. Аналитическое решение задачи в этих областях на данный момент отсутствует. На рис. 3.2, 3.4, 3.5 приведены примеры использования алгоритмических методов решения, из которых можно сделать вывод, что в указанных областях оптимальная организация ведет себя сложным образом.

Глава III. Алгоритмы поиска оптимального дерева.

В данной главе рассматриваются методы решения задачи об оптимальных на $D(f)$ и $D_r(f)$ деревьях организации одной группы $f = N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ для структурного функционала стоимости. Для монотонных функционалов по теореме 1.4 и следствию найденные деревья также будут и оптимальными организациями одной группы на $O(f)$ и $O_r(f)$.

Согласно теореме 1.7 существуют оптимальные на $D(f)$ и $D_r(f)$ ¹ деревья организации, которые не содержат повторяющихся групп. Ниже в данной главе считаем, что во множества $D(f)$ и $D_r(f)$ входят только такие деревья. Найденные графы будут оптимальными и на первоначальных множествах $D(f)$ и $D_r(f)$. Таким образом, для любой вершины $g \in V \setminus N_D$ произвольного дерева $D = (V, E) \in D(f)$ выполнено $|Q_D(g)| \geq 2$ и любая подгруппа $h \in Q_D(g)$ строго вложена в g : $h \subset g$ (см. лемму 1.4). То же считаем выполненным и для $D \in D_r(f)$. Ниже эти свойства специально не оговариваются.

В §1 оценивается сложность и строятся алгоритмы точного решения задачи об оптимальном дереве. При этом пункты 1 и 2 посвящены структурному функционалу общего вида, а пункты 3 и 4 – функционалу вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, зависящему не от состава подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, организуемых в группу g , а лишь от их мощностей $|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|$. Например, для определенного в главе II анонимного функционала с функцией сложности вида (2.2) требование $P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k), C(g)) = P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ эквивалентно условию равенства сложностей элементов: $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_n)$. Очевидно, что если функционал имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и группы g и h равномощны – $|g| = |h|$, то стоимости оптимальных на $D(g)$ и $D(h)$ деревьев организации g и h будут равны. То же верно и для множеств $D_r(g)$ и $D_r(h)$. Ниже при разработке

¹ Напомним, что для одной группы f множество $\tilde{O}(f)$ организаций без пересечений и множество $D(f)$ деревьев организации совпадают (см. утв. 1.2). То же верно и для множеств $\tilde{O}_r(f)$ и $D_r(f)$.

методов решения подразумеваем этот факт, не оговаривая его каждый раз специально.

В §2 строятся эвристические алгоритмы решения задачи для функционала общего вида (см. п.3 и п.4) и для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ (см. п.1 и п.2)¹. Сложность эвристических алгоритмов ниже минимально возможной сложности точных алгоритмов. Как показано в §1, в худшем случае погрешность таких алгоритмов сколь угодно велика. Поэтому необходимо тестировать “качество работы” эвристических алгоритмов для конкретных функционалов. В §2 приведены примеры тестирования.

Все построенные в данной главе алгоритмы основаны на следующем принципе динамического программирования. Пусть дерево $D = (V, E) \in D(f)$ оптимально на $D(f)$. Обозначим через D_g поддерево D с корнем в некоторой промежуточной группе $g \in V / N_D$. Тогда очевидно, что D_g – оптимальное на $D(g)$ дерево (в противном случае при замене поддерева D_g на поддерево меньшей стоимости уменьшилась бы стоимость D , что невозможно). То есть любое поддерево оптимального дерева оптимально. Ниже при построении алгоритмов этот факт специально не оговаривается.

§1. Точное решение задачи об оптимальном дереве.

1. Оценка сложности общей задачи на $D(f)$. Переборный алгоритм.

Через $q(n, r)$ обозначим количество способов нетривиального² разбиения группы из n элементов не более чем на r непересекающихся подгрупп, $n \geq 2$, $r \geq 2$. Через $q(n) = q(n, n)$ обозначим общее число способов нетривиального разбиения группы из n элементов.

Очевидно, что для любого $r > n$ выполнено $q(n, r) = q(n, n) = q(n)$, так как нельзя разбить группу из n

¹ Такой порядок пунктов определяется удобством изложения эвристических алгоритмов.

² То есть группа разбивается на две или более подгруппы.

элементов более чем на n непересекающихся подгрупп. Ниже (см. леммы 3.1 и 3.2) при вычислении $q(n, r)$ ограничимся величинами $2 \leq r \leq n$, так как после их вычисления величина $q(n, r)$ для больших r получается тривиально.

Следующее утверждение дает нижнюю оценку количества вычислений функционала стоимости любым точным алгоритмом.

Утверждение 3.1. Алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве на $D(f)$, $|f| = n \geq 3$ для структурного функционала P общего вида, должен проанализировать не менее $q(n)$ значений P . Любой алгоритм, анализирующий менее $q(n)$ значений P , может выдать решение, стоимость которого сколь угодно больше стоимости оптимального дерева.

Доказательство. Зададим функционал $P'(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ стоимости организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ следующим образом:

$$(3.1) \quad P'(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \\ y, & \text{при } g = f \end{cases},$$

где $y > 0$ – произвольное число.

Тогда любое дерево $D \in D(f)$ имеет стоимость y . Предположим, что алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве на $D(f)$, анализирует менее $q(n)$ значений P . Применим его для решения задачи с функционалом P' . Обозначим полученное дерево через $D' \in D(f)$. Алгоритм не проанализирует хотя бы одного варианта организации f из непересекающихся подгрупп. Обозначим их через $h_1, \mathbf{K}, h_j$, $f = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_j$. Если $Q_{D'}(f) \neq \{h_1, \mathbf{K}, h_j\}$, то зададим функционал P'' следующим образом:

$$(3.2) \quad P''(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \text{ или при } k = j, g_1 = h_1, \mathbf{K}, g_j = h_j \\ y, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Если $Q_{D'}(f) = \{h_1, \mathbf{K}, h_j\}$, то, выбрав произвольное $z > y$, зададим P'' следующим образом:

$$(3.3) \quad P''(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \\ z, & \text{при } k = j, g_1 = h_1, \mathbf{K}, g_j = h_j \\ y, & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Применим алгоритм для решения задачи с функционалом P'' . Мы изменили значение функционала только на наборе подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Это значение алгоритм не анализировал. Следовательно, в качестве решения опять будет выдано дерево D' .

При первом варианте выбора P'' деревья из $D(f)$, в которых группа f организуется из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, имеют нулевую стоимость, а $P(D') = y$. При втором варианте выбора P'' в силу $n \geq 3$ в $D(f)$ существует по крайней мере одно дерево, в котором группа f организуется не из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Стоимость такого дерева равна y , а $P(D') = z$. В обоих случаях стоимость выданного решения может быть сколь угодно большей, чем стоимость оптимального дерева. Утверждение доказано.

Следствие. Не существует полиномиального по n алгоритма решения задачи об оптимальном на $D(f)$ дереве организации со структурным функционалом общего вида.

Доказательство. Выполнено $q(n) \geq q(n, 2) = 2^{n-1} - 1$. Следствие доказано.

Доказательство следующего утверждения дает алгоритм поиска оптимального дерева на $D(f)$ ¹ и его сложность. Будем называть построенный алгоритм переборным.

Утверждение 3.2. Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве организации на $D(f)$, $|f| = n$ для структурного функционала P общего вида за $s(n) = \sum_{i=2, n} C_n^i q(i)$ вычислений P .

¹ Если стоит задача поиска оптимального на $D(f)$ дерева с уровнем, не превышающим L (максимальная длина пути из начальной вершины в f не более L), то алгоритм может быть очевидным образом модифицирован. Пусть для некоторого $2 \leq i \leq n$ и для всех $1 \leq l \leq L$ известны оптимальные деревья организации всех групп мощности менее i с уровнем не более l . Если ищем такое же дерево для группы g мощности i , то уровень оптимальных деревьев организации всех подгрупп не должен превосходить $l - 1$. Оптимальное дерево с такими характеристиками нам известно. Следовательно решим задачу для g . Сложность такого алгоритма превосходит сложность аналогичного алгоритма утв. 3.2 не более, чем в L раз.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $2 \leq i \leq n$ известны оптимальные деревья организации всех групп мощности менее i и их стоимость. Разобьем группу g мощности i на подгруппы всевозможными способами, их $q(i)$.

Пусть в очередном варианте группа g разбивается на подгруппы $g_1, \mathbf{K}, g_k$. Мощность подгрупп не превосходит $i-1$. Следовательно, для них известны оптимальные деревья организации. Сложим их стоимости, прибавим $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$. Получим стоимость некоторого дерева организации g . В оптимальном дереве g организуется из некоторых подгрупп $g'_1, \mathbf{K}, g'_k$. Вариант с такой стоимостью будет найден, следовательно найдем оптимальное дерево организации g . Всего имеется C_n^i групп мощности i . Вычислив для каждой из них функционал стоимости $q(i)$ раз, перейдем к группам большей мощности. В итоге, вычислив $s(n)$ значений P , решим задачу для f . Утверждение доказано.

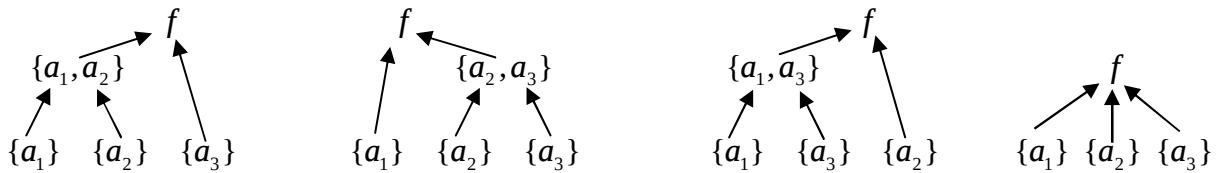


Рис. 3.1. Множество $D(f)$ деревьев организации группы $f = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Приведем пример. Пусть $f = \{a_1, a_2, a_3\}$. Существует один способ разбиения f на три подгруппы и три способа разбиения f на две подгруппы. То есть $q(3,2) = 3$, $q(3,3) = q(3) = 4$. Неэлементарные подгруппы f имеют мощность два, следовательно разбиваются на подгруппы единственным способом. Следовательно, имеем 4 варианта дерева организации f , изображенные на рис. 3.1.

Суть утверждения 3.1 состоит в том, что если хотя бы один из четырех вариантов разбиения f не будет проанализирован, то как раз этот вариант может оказаться оптимальным, а алгоритмом будет найдено дерево большей стоимости.

Поясним переборный алгоритм (см. док-во утв. 3.2). Сначала найдем оптимальные деревья организации всех групп мощности 2. Таких групп три: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3\}$. Дерево организации

каждой такой группы единственно. Вычислим его стоимость. Это потребует $3q(2) = 3$ вычислений функционала. Разобьем f на всевозможные подгруппы. Например, рассмотрим рис. 3.1 слева. Вычислим значение $P(\{a_1, a_2\}, \{a_3\})$, прибавим известную стоимость $P(\{a_1\}, \{a_2\})$ дерева организации $\{a_1, a_2\}$. Результатом будет стоимость дерева организации f при разбиении на $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3\}$. Таким образом, вычислив еще $q(3) = 4$ значения функционала, найдем стоимости четырех деревьев организации f . Дерево минимальной стоимости и будет оптимально. Всего вычислим $s(3) = 3q(2) + q(3) = 7$ значений функционала.

Для вычисления $q(n, r)$ введем следующие вспомогательные величины. Через $A(n, r)$ обозначим количество способов разбиения группы из n элементов ровно на r непересекающихся подгрупп с учетом их порядка, $n \geq 1$, $1 \leq r \leq n$. Учет порядка означает, что разными считаются варианты с одними и теми же, но переставленными местами подгруппами.

Лемма 3.1. Для $n \geq 1$ и $1 \leq r \leq n$ выполнено равенство $A(n, r) = r^n - C_r^1 A(n, r-1) - C_r^2 A(n, r-2) - \dots - C_r^{r-1} A(n, 1)$.

Доказательство. При разбиении группы $g = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ на r подгрупп элемент a_1 можно поместить в первую, вторую, и так далее, в r -ю подгруппу. Так как порядок подгрупп учитывается, то получим r вариантов размещения a_1 . Элемент a_2 также можно разместить r вариантами, независимо от размещения a_1 . И так далее, все n элементов можно разместить по r подгруппам r^n способами. В эту величину входят и те варианты, в которых некоторые подгруппы остаются пустыми. Подсчитаем число вариантов с одной пустой подгруппой. Выбрать пустую подгруппу можно $C_r^1 = r$ способами. Число вариантов разбиения g на $r-1$ оставшихся подгрупп равно $A(n, r-1)$. Всего получаем $C_r^1 A(n, r-1)$ вариантов с одной пустой подгруппой. Аналогично, число вариантов с двумя пустыми подгруппами равно $C_r^2 A(n, r-2)$. И так далее, число вариантов с $r-1$ пустой подгруппой будет равно $C_r^{r-1} A(n, 1)$. Вычтя “лишние” варианты из r^n , докажем лемму.

Лемма 3.2. Для $n \geq 2$ и $2 \leq r \leq n$ выполнено равенство $q(n, r) = A(n, r) / r! + A(n, r - 1) / (r - 1)! + \mathbf{K} + A(n, 2) / 2!$.

Доказательство. $q(n, r)$ – количество способов нетривиального разбиения группы $g = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ на r или менее подгрупп без учета порядка. Число вариантов разбиения ровно на r подгрупп равно $A(n, r) / r!$, так как отождествляются варианты с одними и теми же, но переставленными местами подгруппами. Аналогично, число вариантов разбиения ровно на $r - 1$ подгруппу равно $A(n, r - 1) / (r - 1)!$. И так далее, число вариантов разбиения на две подгруппы (минимальное количество подгрупп в нетривиальном разбиении) равно $A(n, 2) / 2!$. Просуммировав все варианты, получим $q(n, r)$. Лемма доказана.

Выполнено $A(n, 1) = 1$. Далее можно по формуле леммы 3.1 последовательно вычислить величины $A(n, 2), \mathbf{K}, A(n, n)$. После этого по формуле леммы 3.2 вычисляются величины $q(n, r)$. В силу $q(n) = q(n, n)$ вычислим и величину $q(n)$.

n	$q(n)$	n	$q(n)$	n	$q(n)$
1	-	8	4 139	15	1 382 958 544
2	1	9	21 146	16	10 480 142 146
3	4	10	115 974	17	82 864 869 803
4	14	11	678 569	18	682 076 806 158
5	51	12	4 213 596	19	5 832 742 205 056
6	202	13	27 644 436	20	51 724 158 235 371
7	876	14	190 899 321	21	474 869 816 156 750

Таблица 3.1. Минимальная сложность $q(n)$ точного алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$.

Итак, сложность наилучшего алгоритма, решающего задачу об оптимальном дереве на $D(f)$, лежит между $q(n)$ и $s(n)$. Значения $q(n)$ приведены в таблице 3.1. Значения $s(n)$ и их отношение к $q(n)$ приведены в таблице 3.2. Решать переборным алгоритмом задачи с размерностью больше 20 не представляется возможным. С другой стороны, если некоторый алгоритм решает задачу хотя бы с ограниченной погрешностью, то его сложность может быть ниже не более, чем на порядок (так как $s(20) / q(20) < 10$). Таким образом, имеет смысл построение эвристических алгоритмов, которые решают задачу с приемлемой погрешностью для некоторых функционалов стоимости (см. §2).

n	$s(n)$	$s(n)/q(n)$	n	$s(n)$	$s(n)/q(n)$	n	$s(n)$	$s(n)/q(n)$
1	-	-	8	20 891	5.05	15	10 480 109 379	7.58
2	1	1	9	115 463	5.46	16	82 864 804 268	7.91
3	7	1.75	10	677 546	5.84	17	682 076 675 087	8.23
4	36	2.57	11	4 211 549	6.21	18	5 832 741 942 913	8.55
5	171	3.35	12	27 640 341	6.56	19	51 724 157 711 084	8.87
6	813	4.02	13	190 891 130	6.91	20	474 869 815 108 175	9.18
7	4 012	4.58	14	1 382 942 161	7.24	21	4 506 715 736 350 170	9.49

Таблица 3.2. Сложность $s(n)$ переборного алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$.

Приведем пример найденного алгоритмом оптимального на $D(f)$ дерева организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{12}\}$ из двенадцати элементов ($n = 12$) для функционала (III) с функцией сложности вида (2.2) (см. §2 гл. II). Для примера положим $a = 1$ и $b = 0.8$, то есть рассмотрим точку из области, в которой функционал не является ни выпуклым, ни вогнутым (см. рис. 2.7). Сложности элементов: $C(a_1) = 1, C(a_2) = 2, \mathbf{K}, C(a_{12}) = 12$.

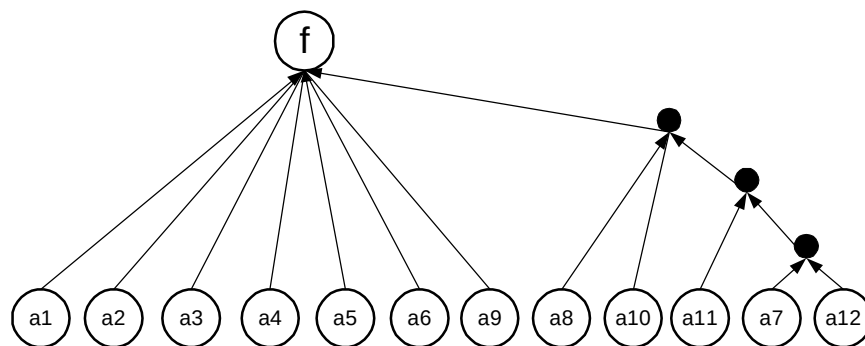


Рис. 3.2. Оптимальное на $D(f)$ дерево организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{12}\}$.

Оптимальное дерево изображено на рис. 3.2. Оно содержит три промежуточные группы. Группа f организуется из подгруппы $\{a_7, a_8, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$ и семи элементарных подгрупп. Таким образом, в отличие от случая $b \geq 1$, не только последовательная организация, но и 2-дерево не будет оптимальным. При приближении b к нулю значение функционала стремится к единице, то есть стоимость графа стремится к количеству неэлементарных групп. Следовательно, при достаточно малом b будет оптимальна всеерная организация, содержащая единственную

неэлементарную группу. В вышеуказанном примере при $b \leq 0.5$ оптимальна веерная организация, но при другом выборе сложностей элементов могут требоваться все меньшие b для оптимальности веерной организации. В результате можно сделать вывод, что разработанных аналитических методов недостаточно для поиска оптимальных деревьев при функционале (III) с $b < 1$, но можно использовать алгоритмические методы, изложенные в настоящей главе.

2. Оценка сложности общей задачи на $D_r(f)$. Переборный алгоритм.

Следующее утверждение представляет собой аналог утверждения 3.1 для $D_r(f)$.

Утверждение 3.3. Алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$, $r \geq 2$, $|f| = n \geq 3$ для структурного функционала P общего вида, должен проанализировать не менее $q(n, r)$ значений P . Любой алгоритм, анализирующий менее $q(n, r)$ значений P , может выдать решение, стоимость которого сколь угодно больше стоимости оптимального r -дерева.

Доказательство. Зададим функционал $P'(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ стоимости организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ в соответствии с формулой (3.1) (см. утв. 3.1). Тогда любое r -дерево $D \in D_r(f)$ имеет стоимость y . Предположим, что алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$, анализирует менее $q(n, r)$ значений P . Применим его для решения задачи с функционалом P' . Обозначим полученное r -дерево через $D' \in D_r(f)$. Алгоритм не проанализирует хотя бы одного варианта организации f из j непересекающихся подгрупп, $2 \leq j \leq r$. Обозначим их через $h_1, \mathbf{K}, h_j$, $f = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_j$. Если $Q_{D'}(f) \neq \{h_1, \mathbf{K}, h_j\}$, то зададим функционал g в соответствии с формулой (3.2), иначе, выбрав произвольное $z > y$, зададим P'' в соответствии с формулой (3.3) (см. утв. 3.1).

Применим алгоритм для решения задачи с функционалом P'' . Мы изменили значение функционала только на наборе подгрупп

$h_1, \mathbf{K}, h_j$. Это значение алгоритм не анализировал. Следовательно, в качестве решения опять будет выдано r -дерево D' . При первом варианте выбора P'' r -деревья из $D_r(f)$, в которых группа f организуется из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, имеют нулевую стоимость, а $P(D') = y$. При втором варианте выбора P'' в силу $n \geq 3$ в $D_r(f)$ существует по крайней мере одно r -дерево, в котором группа f организуется не из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Стоимость такого r -дерева равна y , а $P(D') = z$. В обоих случаях стоимость выданного решения может быть сколь угодно большей, чем стоимость оптимального r -дерева. Утверждение доказано.

Следствие. Для любого $r \geq 2$ не существует полиномиального по n алгоритма решения задачи об оптимальном на $D_r(f)$ r -дереве организации со структурным функционалом общего вида.

Доказательство. Выполнено $q(n, r) \geq q(n, 2) = 2^{n-1} - 1$. Следствие доказано.

Доказательство следующего утверждения дает алгоритм поиска оптимального r -дерева на $D_r(f)$ ¹ и его сложность. Будем называть построенный алгоритм переборным.

Утверждение 3.4. Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве организации на $D_r(f)$, $r \geq 2$, $|f| = n$ для структурного функционала P общего вида за $s(n, r) = \sum_{i=2, n} C_n^i q(i, r)$ вычислений P .

Доказательство. Предположим, что для некоторого $2 \leq i \leq n$ известны оптимальные r -деревья организации всех групп мощности менее i и их стоимость. Разобьем группу g мощности i на r или менее непересекающихся подгрупп всевозможными способами, их $q(i, r)$. Пусть в очередном варианте группа g разбивается на подгруппы $g_1, \mathbf{K}, g_k$, $2 \leq k \leq r$. Мощность подгрупп не превосходит $i-1$. Следовательно, для них известны оптимальные r -деревья организации. Сложим их стоимости,

¹ Аналогичным образом строится алгоритм поиска оптимального на $D_r(f)$ дерева с уровнем не более L (см. сноску перед утв. 3.2).

прибавим $P(g_1, \mathbf{K}, g_k)$. Получим стоимость некоторого r -дерева организации g . В оптимальном r -дереве g организуется из некоторых подгрупп $g'_1, \mathbf{K}, g'_{k'}, 2 \leq k' \leq r$. Вариант с такой стоимостью будет найден, следовательно найдем оптимальное r -дерево организации g . Всего имеется C_n^i групп мощности i . Вычислив для каждой из них функционал стоимости $q(i, r)$ раз, перейдем к группам большей мощности. В итоге, вычислив $s(n, r)$ значений P , решим задачу для f . Утверждение доказано.

В примере на рис. 3.1 только три дерева, изображенные слева, будут 2-деревьями. Рассматриваем $q(3, 2) = 3$ варианта разбиения группы $f = \{a_1, a_2, a_3\}$ на две подгруппы. В остальном переборный алгоритм на $D_r(f)$ полностью аналогичен алгоритму на $D(f)$ (см. утв. 3.2). В итоге вычислим $s(3, 2) = 6$ значений функционала.

Способ вычисления $q(n, r)$ приведен выше (см. леммы 3.1 и 3.2). По этим величинам можно вычислить $s(n, r)$. Итак, сложность наилучшего алгоритма, решающего задачу об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$, лежит между $q(n, r)$ и $s(n, r)$. Примеры значений $q(n, r)$ и $s(n, r)$ для $r = 2$ приведены в таблице 3.3.

n	$q(n, 2)$	$s(n, 2)$	n	$q(n, 2)$	$s(n, 2)$	n	$q(n, 2)$	$s(n, 2)$
1	-	-	8	127	3 025	15	16 383	7 141 686
2	1	1	9	255	9 330	16	32 767	21 457 825
3	3	6	10	511	28 501	17	65 535	64 439 010
4	7	25	11	1 023	86 526	18	131 071	193 448 101
5	15	90	12	2 047	261 625	19	262 143	580 606 446
6	31	301	13	4 095	788 970	20	524 287	1 742 343 625
7	63	966	14	8 191	2 375 101	21	1 048 575	5 228 079 450

Таблица 3.3. Минимальная сложность $q(n, 2)$ точного алгоритма поиска оптимального 2-дерева на $D_2(f)$ и сложность $s(n, 2)$ переборного алгоритма.

Видно, что при $n \leq 20$ сложность переборного алгоритма поиска оптимального 2-дерева остается приемлемой. В то же время она существенно превосходит нижнюю оценку сложности алгоритма. С другой стороны, как показывает таблица 3.4, при увеличении r нижняя оценка довольно быстро приближается к сложности переборного алгоритма. Видно, что при $n = 15$ и $r \geq 6$ сложность переборного алгоритма превосходит нижнюю оценку не более чем на порядок.

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s(15,r)/q(15,r)$	435	74	28	15	10	8.7	7.9	7.6	7.6	7.6	7.6	7.6	7.6	7.6

Таблица 3.4. Отношение сложности переборного алгоритма поиска r -дерева $s(n,r)$ к минимально возможной сложности точного алгоритма $q(n,r)$ при $n=15$.

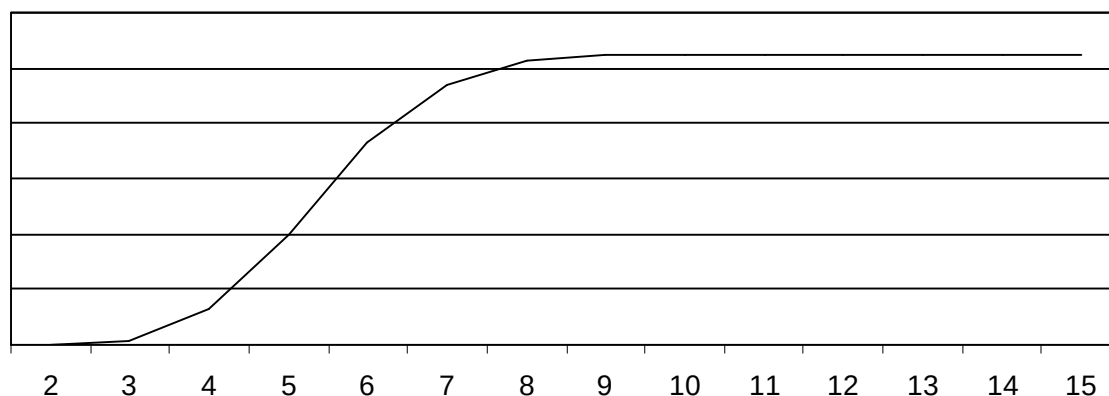


Рис. 3.3. Сложность $s(15,r)$ переборного алгоритма поиска r -дерева при $2 \leq r \leq 15$.

Рис. 3.3 показывает, что при росте r от 2 до n сложность переборного алгоритма поиска оптимального r -дерева быстро возрастает примерно до $r = n/2$, после чего остается практически неизменной, близкой к $s(n)$ (см. таблицу 3.2). То есть сложность $s(n/2, n)$ переборного алгоритма при $n > 20$ неприемлемо высока.

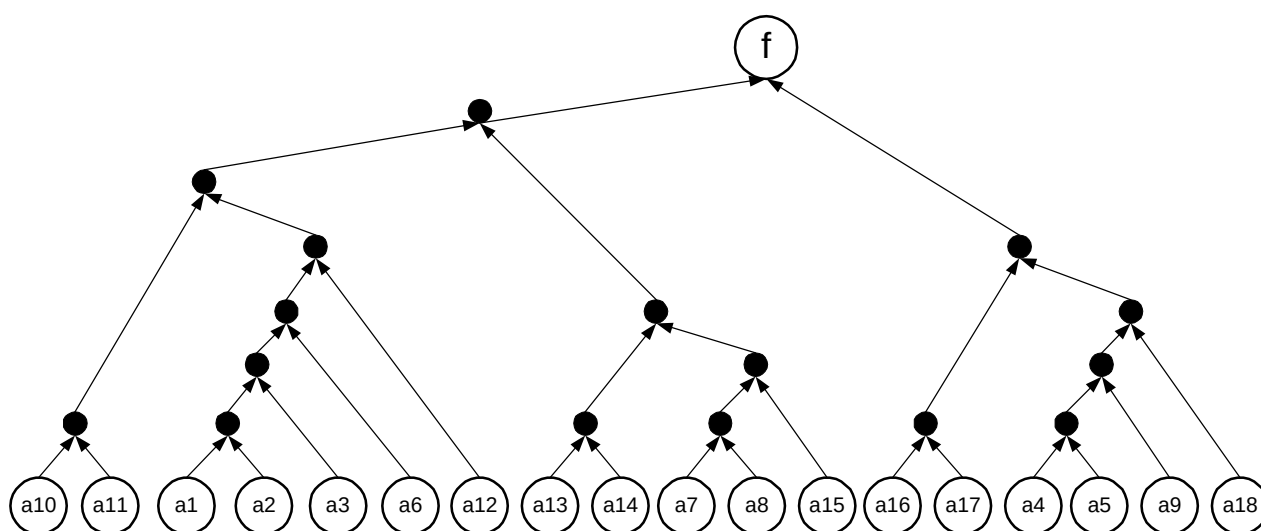


Рис. 3.4. Оптимальное на $D_2(f)$ 2-дерево организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{18}\}$.

Приведем пример найденного алгоритмом оптимального на $D_2(f)$ 2-дерева организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{18}\}$ из

восемнадцать элементов ($n=18$) для функционала (IV) с функцией сложности вида (2.2) (см. §2 гл. II). Для примера положим $a=1$ и $b=0.5$, то есть рассмотрим точку из области, в которой функционал не является ни выпуклым, ни вогнутым (см. рис. 2.8). Сложности элементов определим следующим образом $C(a_1)=1, C(a_2)=2, \mathbf{K}, C(a_{18})=18$. Оптимальное 2-дерево изображено на рис. 3.4.

3. Оценка сложности задачи на $D(f)$ при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Алгоритм решения.

Как было отмечено в начале главы, если функционал имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, то стоимость организации подгрупп в группу зависит только от их мощностей, но не от состава. То есть варианты разбиения g на подгруппы одинаковой мощности имеют одинаковую стоимость. Приведем формальные определения.

Определение 3.1. Для любого нетривиального¹ разбиения группы g на непересекающиеся подгруппы $Q = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \geq 2$, $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ вектором длин, соответствующим набору Q , назовем вектор $v = (v_1, \mathbf{K}, v_{|g|-1})$, i -я компонента v_i которого равна количеству подгрупп мощности i , входящих в Q , $i = \overline{1, |g|-1}$.

Определение 3.2. Два нетривиальных разбиения Q_1 и Q_2 группы g назовем существенно различными, если различаются векторы длин, соответствующие Q_1 и Q_2 .

Если наборы $Q_1 = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ и $Q_2 = \{h_1, \mathbf{K}, h_k\}$, $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_k$ не являются существенно различными, то очевидно, что наборы чисел $|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|$ и $|h_1|, \mathbf{K}, |h_k|$ одинаковы с точностью до перестановки, следовательно выполнено соотношение $P(Q_1) = P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|) = P(|h_1|, \mathbf{K}, |h_k|, |g|) = P(Q_2)$. Таким образом, при поиске оптимального дерева переборными алгоритмами (см. утв. 3.2 и 3.4) можно анализировать не все

¹ То есть группа разбивается на две или более подгруппы.

разбиения, а лишь те, которые существенно различны. Переформулируем пункт 1 для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Через $\tilde{q}(n, r)$ обозначим количество способов нетривиального разбиения группы из n элементов на существенно различные наборы из r или менее подгрупп, $n \geq 2, r \geq 2$. Через $\tilde{q}(n) = \tilde{q}(n, n)$ обозначим общее число способов нетривиального разбиения группы из n элементов на существенно различные наборы подгрупп. Очевидно, что для любого $r > n$ выполнено $\tilde{q}(n, r) = \tilde{q}(n, n) = \tilde{q}(n)$, так как нельзя разбить группу из n элементов более чем на n непересекающихся подгрупп.

Утверждение 3.5. Алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве на $D(f)$, $|f| = n \geq 3$ с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, должен проанализировать не менее $\tilde{q}(n)$ значений функционала P . Любой алгоритм, анализирующий менее $\tilde{q}(n)$ значений P , может выдать решение, стоимость которого сколь угодно больше стоимости оптимального дерева.

Доказательство. Зададим функционал $P'(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ стоимости организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ следующим образом:

$$(3.4) \quad P'(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \\ y, & \text{при } g = f \end{cases},$$

где $y > 0$ – произвольное число.

Тогда любое дерево $D \in D(f)$ имеет стоимость y . Предположим, что алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве на $D(f)$, анализирует менее $\tilde{q}(n)$ значений P . Применим его для решения задачи с функционалом P' . Обозначим полученное дерево через $D' \in D(f)$. Найдется такой набор подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, $f = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_j$, что все варианты организации f , стоимость которых проанализирует алгоритм, будут существенно отличаться от $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Если в D' набор $Q_{D'}(f)$ существенно отличается от $h_1, \mathbf{K}, h_j$, то зададим функционал P'' следующим образом:

$$(3.5) \quad P''(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \text{ или при } k = j \text{ и несущественном} \\ & \text{различии } g_1, \mathbf{K}, g_k \text{ и } h_1, \mathbf{K}, h_j \\ y, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Если в D' набор $Q_{D'}(f)$ не отличается существенно от $h_1, \mathbf{K}, h_j$, то, выбрав произвольное $z > y$, зададим функционал P'' следующим образом:

$$(3.6) \quad P''(g_1, \mathbf{K}, g_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } g \neq f \\ z, & \text{при } k = j \text{ и несущественном} \\ & \text{различии } g_1, \mathbf{K}, g_k \text{ и } h_1, \mathbf{K}, h_j \\ y, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Применим алгоритм для решения задачи с функционалом P'' . Мы изменили значения функционала только для тех вариантов организации f , которые несущественно отличаются от $h_1, \mathbf{K}, h_j$ ¹. Эти значения алгоритм не анализировал. Следовательно, в качестве решения опять будет выдано дерево D' .

При первом варианте выбора P'' деревья из $D(f)$, в которых группа f организуется из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, имеют нулевую стоимость, а $P(D') = y$.

При втором варианте выбора P'' в силу $n \geq 3$ в $D(f)$ существует по крайней мере одно дерево, в котором группа f организуется из набора подгрупп, существенно отличающегося от $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Стоимость такого дерева равна y , а $P(D') = z$.

В обоих случаях стоимость выданного решения может быть сколь угодно большей, чем стоимость оптимального дерева. Утверждение доказано.

Лемма 3.3. Если функционал имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и при каждом $i = \overline{2, n}$ для некоторой группы g мощности i известно ее разбиение $Q(g)$ в некотором оптимальном дереве $D_g \in D(g)$ организации g , то можно построить оптимальное на $D(f)$ дерево организации f , $|f| = n$, не вычисляя значений функционала стоимости.

Доказательство. Для группы мощности два существует единственное дерево организации, построить которое можно, не

¹ Изменить значение функционала только на наборе подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$ нельзя, так как P имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и при изменении стоимости $P(h_1, \mathbf{K}, h_j)$ автоматически изменится стоимость всех вариантов, которые несущественно отличаются от $h_1, \mathbf{K}, h_j$.

вычисляя P . Введем индуктивное предположение, что для всех групп мощности меньше s можно построить оптимальные деревья их организации без вычисления P ($2 < s \leq n$).

Рассмотрим произвольную группу $h = \{a_{l_1}, \mathbf{K}, a_{l_s}\}$ мощности s . Известно некоторое разбиение $Q_1 = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$ группы g мощности s в оптимальном дереве $D_g \in D(g)$. Обозначим мощности групп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ через $j_1, \mathbf{K}, j_k$, $j_1 + \mathbf{K} + j_k = s$. Построим разбиение группы h на подгруппы $Q_2 = \{h_1, \mathbf{K}, h_k\}$ следующим образом: $h_1 = \{a_{l_1}, \mathbf{K}, a_{l_{j_1}}\}$, $h_2 = \{a_{l_{j_1+1}}, \mathbf{K}, a_{l_{j_1+j_2}}\}$, ..., $h_k = \{a_{l_{j_1+\mathbf{K}+j_{k-1}+1}}, \mathbf{K}, a_{l_s}\}$. То есть отнесем к подгруппе h_1 первые j_1 элементов h , ко второй – следующие j_2 элементов h , и т. д. Наборы Q_1 и Q_2 не являются существенно различными, следовательно $P(Q_1) = P(Q_2)$.

Мощность групп $h_1, \mathbf{K}, h_k$ меньше s , следовательно по индуктивному предположению для каждой h_j , $j = \overline{1, k}$ можем построить оптимальное дерево организации h_j , не вычисляя P . Стоимость такого дерева будет равна стоимости оптимального дерева организации g_j в силу $|g_j| = |h_j|$. Тогда можно построить дерево $D_h \in D(h)$ организации h , проведя в h ребра из корней оптимальных деревьев организации групп $h_1, \mathbf{K}, h_k$. Имеем $P(D_h) = P(D_g)$ в силу равенства стоимостей поддеревьев и условия $P(Q_1) = P(Q_2)$. То есть, опираясь на индуктивное предположение, построили оптимальное дерево организации группы h , не вычисляя P . В итоге по индукции доказана возможность такого построения для группы мощности n , то есть для f . Лемма доказана.

Доказательство следующего утверждения дает алгоритм поиска оптимального дерева на $D(f)^1$ с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и его сложность.

Утверждение 3.6. Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном дереве организации на $D(f)$, $|f| = n$ с

¹ Аналогичным образом строится алгоритм поиска оптимального на $D_r(f)$ дерева с уровнем не более L (см. сноску перед утв. 3.2).

функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ за $\tilde{s}(n) = \sum_{i=\overline{2}, n} \tilde{q}(i)$ вычислений P .

Доказательство. Предположим, что для фиксированного $2 \leq i \leq n$ при каждом $j = \overline{1, i-1}$ для некоторой группы g_j мощности j известно ее разбиение $Q(g_j)$ в некотором оптимальном дереве $D_{g_j} \in D(g_j)$ организации g_j и стоимость этого дерева $P(D_{g_j})$.¹ Рассмотрим некоторую группу g_i мощности i и проанализируем все $\tilde{q}(i)$ вариантов существенно различного разбиения g_i на подгруппы.

Пусть в очередном варианте группа g_i разбивается на подгруппы $Q'(g_i)$. Мощность подгрупп из $Q'(g_i)$ не более $i-1$. По предположению для подгрупп такой мощности известна стоимость оптимального дерева организации (стоимость оптимальных деревьев организации всех подгрупп одинаковой мощности одинакова в силу вида функционала). Вычислим $P(Q'(g_i))$, прибавим стоимости оптимальных деревьев организации подгрупп из $Q'(g_i)$. Получим стоимость некоторого дерева организации g_i . В оптимальном дереве $D^* \in D(g_i)$ группа g_i организуется из некоторых подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_k$. Будет проанализировано разбиение $Q'(g_i)$ группы g_i , которое несущественно отличается от $h_1, \mathbf{K}, h_k$. Тогда $P(h_1, \mathbf{K}, h_k) = P(Q'(g_i))$, соответствующие подгруппы в наборах $Q(g_i)$ и $h_1, \mathbf{K}, h_k$ имеют одинаковую мощность. Следовательно, стоимость оптимального на $D(g_i)$ дерева и соответствующее ей разбиение $Q'(g_i)$ будут найдены алгоритмом. Что позволяет перейти к следующему значению i .

Для каждого $i = \overline{2}, n$ вычислим функционал стоимости $\tilde{q}(i)$ раз. В итоге, вычислив $\tilde{s}(n)$ значений P , при каждом $i = \overline{2}, n$ для некоторой группы g_i мощности i найдем ее разбиение $Q(g_i)$ в некотором оптимальном дереве $D_{g_i} \in D(g_i)$. После этого по лемме 3.3 построим оптимальное дерево организации f без

¹ При минимальном $i=2$ предположение очевидно выполнено, так как оптимальное дерево организации элементарной группы состоит из одной изолированной вершины и имеет нулевую стоимость.

дополнительных вычислений функционала стоимости. Утверждение доказано.

Поясним определения 3.1 и 3.2, утверждения 3.5 и 3.6 на примере (см. рис. 3.1). Три варианта разбиения $f = \{a_1, a_2, a_3\}$, изображенные слева, не являются существенно различными, так как в них f разбивается на подгруппу мощности 1 и подгруппу мощности 2 (всем вариантам соответствует один и тот же вектор длин (1,1)). Стоимости соответствующих деревьев равны. Поэтому все три варианта анализировать не нужно, достаточно выбрать любой из них. Кроме того, необходимо вычислить стоимость организации f при разбиении, изображенном справа (см. рис. 3.1). Ему соответствует вектор (3,0), и этот вариант существенно отличается от всех остальных. Всего при анализе разбиений f вычислим $\tilde{q}(3) = 2$ значения функционала. Согласно утверждению 3.5 это минимально возможное количество вычислений точным алгоритмом. Еще $\tilde{q}(2) = 1$ раз вычислим функционал для нахождения стоимости дерева организации группы мощности 2. Всего потребуется $\tilde{s}(3) = \tilde{q}(2) + \tilde{q}(3) = 3$ вычисления.

Алгоритм вычисления величины $\tilde{q}(n)$. Через $\tilde{q}_{i,j}$ обозначим количество способов нетривиального разбиения группы мощности i на существенно различные наборы подгрупп мощности j или более, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, i}$, $\tilde{q}_{i,i} = 0$. Предположим, что для всех допустимых j известны величины $\tilde{q}_{1,j}$, $\tilde{q}_{2,j}, \dots, \tilde{q}_{i-1,j}$. И, кроме того, известны величины $\tilde{q}_{i,i}$, $\tilde{q}_{i,i-1}, \dots, \tilde{q}_{i,j+1}$. То есть известны те элементы матрицы (3.7), которые расположены выше или правее элемента $\tilde{q}_{i,j}$ (все элементы на главной диагонали равны нулю).

$$(3.7) \quad \begin{array}{cccc} \tilde{q}_{1,1} & & & \\ \tilde{q}_{2,1} & \tilde{q}_{2,2} & & \\ \tilde{q}_{3,1} & \tilde{q}_{3,2} & \tilde{q}_{3,3} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{q}_{n,1} & \tilde{q}_{n,2} & \cdot & \cdot & \tilde{q}_{n,n} \end{array}$$

Тогда найдем $\tilde{q}_{i,j}$ следующим образом. Обозначим через k

количество подгрупп мощности j , которое может содержать группа мощности i , чтобы мощность оставшейся части была нулевой или большей, чем j . Тогда имеем:

$$(3.8) \quad k = \begin{cases} 0, \mathbf{K}, \lfloor i/j \rfloor - 1, & \text{при } i \bmod j \neq 0 \\ 0, \mathbf{K}, i/j - 2, i/j, & \text{при } i \bmod j = 0 \end{cases}$$

Поясним формулу (3.8). Если i не делится нацело на j , то в группе мощности i может содержаться не более $\lfloor i/j \rfloor$ подгрупп мощности j . Но если содержится ровно $\lfloor i/j \rfloor$ подгрупп, то мощность оставшейся части больше нуля и меньше j , что недопустимо. Таким образом, в первой строке (3.8) вычитаем 1 из $\lfloor i/j \rfloor$. Если i делится нацело на j , то в группе мощности i может содержаться от 0 до i/j подгрупп мощности j . Но если содержится $i/j - 1$ подгруппа, то мощность оставшейся части равна j , что недопустимо.

По формуле (3.8) выберем некоторое количество k подгрупп мощности j . При $k = 0$ ни одной подгруппы мощности j не выбрано, следовательно “оставшуюся часть” мощности i необходимо разбивать на подгруппы мощности $j+1$ или более. Количество таких вариантов обозначим через $w(0) = \tilde{q}_{i,j+1}$. При $k > 0$ оставшуюся часть мощности $i - kj$ можно вообще не разбивать или разбить на подгруппы мощности $j+1$ или более. Количество вариантов $w(k) = \tilde{q}_{i-kj,j+1} + 1$. Тогда можно записать

$$(3.9) \quad \tilde{q}_{i,j} = \sum_k w(k),$$

где сумма берется по всем возможным значениям k из соотношения (3.8). Равенство справедливо, так как любые наборы, содержащие разное количество подгрупп мощности j , существенно различны, и рассмотренными вариантами исчерпываются все возможности разбиения группы мощности i на существенно различные наборы подгрупп мощности j или более.

Таким образом, в матрице (3.7) можно последовательно вычислить строки сверху вниз, вычисляя каждую из строк справа налево по формуле (3.9). Проведя вычисления в таком порядке, найдем все $\tilde{q}_{i,j}$. Тогда выполнено $\tilde{q}(n) = \tilde{q}_{n,1}$. Алгоритм построен.

Значения $\tilde{q}(n)$ приведены в таблице 3.5. Из таблицы можно сделать вывод, что при увеличении n отношение $\tilde{q}(n)/\tilde{q}(n-1)$

уменьшается. Этот факт позволяет предположить, что порядок минимальной сложности точного алгоритма меньше a^n для любого $a > 1$. То же самое можно сказать и про сложность $\tilde{S}(n)$ построенного алгоритма. Вопрос теоретического доказательства приведенной гипотезы остается открытым. Также открыт вопрос о существовании полиномиальной по n оценки величин $\tilde{q}(n)$, $\tilde{S}(n)$.

n	$\tilde{q}(n)$	$\frac{\tilde{q}(n)}{\tilde{q}(n-1)}$	n	$\tilde{q}(n)$	$\frac{\tilde{q}(n)}{\tilde{q}(n-1)}$	n	$\tilde{q}(n)$	$\frac{\tilde{q}(n)}{\tilde{q}(n-1)}$
20	626	1.28	50	204 225	1.18	80	15 796 475	1.14
30	5 603	1.23	60	966 466	1.16	90	56 634 172	1.13
40	37 337	1.20	70	4 087 967	1.15	100	190 569 291	1.126

Таблица 3.5. Минимальная сложность $\tilde{q}(n)$ точного алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$ при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

n	$\tilde{S}(n)$	$\frac{\tilde{S}(n)}{\tilde{q}(n)}$	n	$\tilde{S}(n)$	$\frac{\tilde{S}(n)}{\tilde{q}(n)}$	n	$\tilde{S}(n)$	$\frac{\tilde{S}(n)}{\tilde{q}(n)}$
20	2 693	4,30	50	1 295 920	6,35	80	123 223 558	7,80
30	28 598	5,10	60	6 639 288	6,87	90	465 672 458	8,22
40	215 267	5,76	70	30 053 883	7,35	100	1 642 992 467	8,62

Таблица 3.6. Сложность $\tilde{S}(n)$ алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$ при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Значения $\tilde{S}(n)$ приведены в таблице 3.6. Из таблицы видно, что построенный алгоритм имеет приемлемую сложность для $n \leq 100$. Кроме того, сложность алгоритма превосходит минимально возможную сложность точного алгоритма не более, чем на порядок ($\tilde{S}(100)/\tilde{q}(100) < 10$). С другой стороны, нижняя оценка $\tilde{q}(n)$ сложности точного алгоритма неприемлемо высока при n существенно большем 100. Таким образом, имеет смысл построение эвристических алгоритмов, которые решают задачу с приемлемой погрешностью для некоторых функционалов стоимости (см. §2).

Приведем пример найденного алгоритмом оптимального на $D(f)$ дерева организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{70}\}$ из семидесяти элементов ($n = 70$) для функционала (II) с функцией сложности вида (2.2) (см. §2 гл. II). Для примера положим $a = 0.5$ и $b = 1.5$, то есть точку из области, в которой функционал не является ни выпуклым, ни вогнутым (см. рис. 2.6). Для того, чтобы функционал имел вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, то есть зависел только от

мощностей подгрупп, сложности элементов должны быть равны: $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_{70})$. В силу однородности функционала масштаб сложности не влияет на оптимальность организации. Положим сложности элементов равными единице: $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_{70}) = 1$.

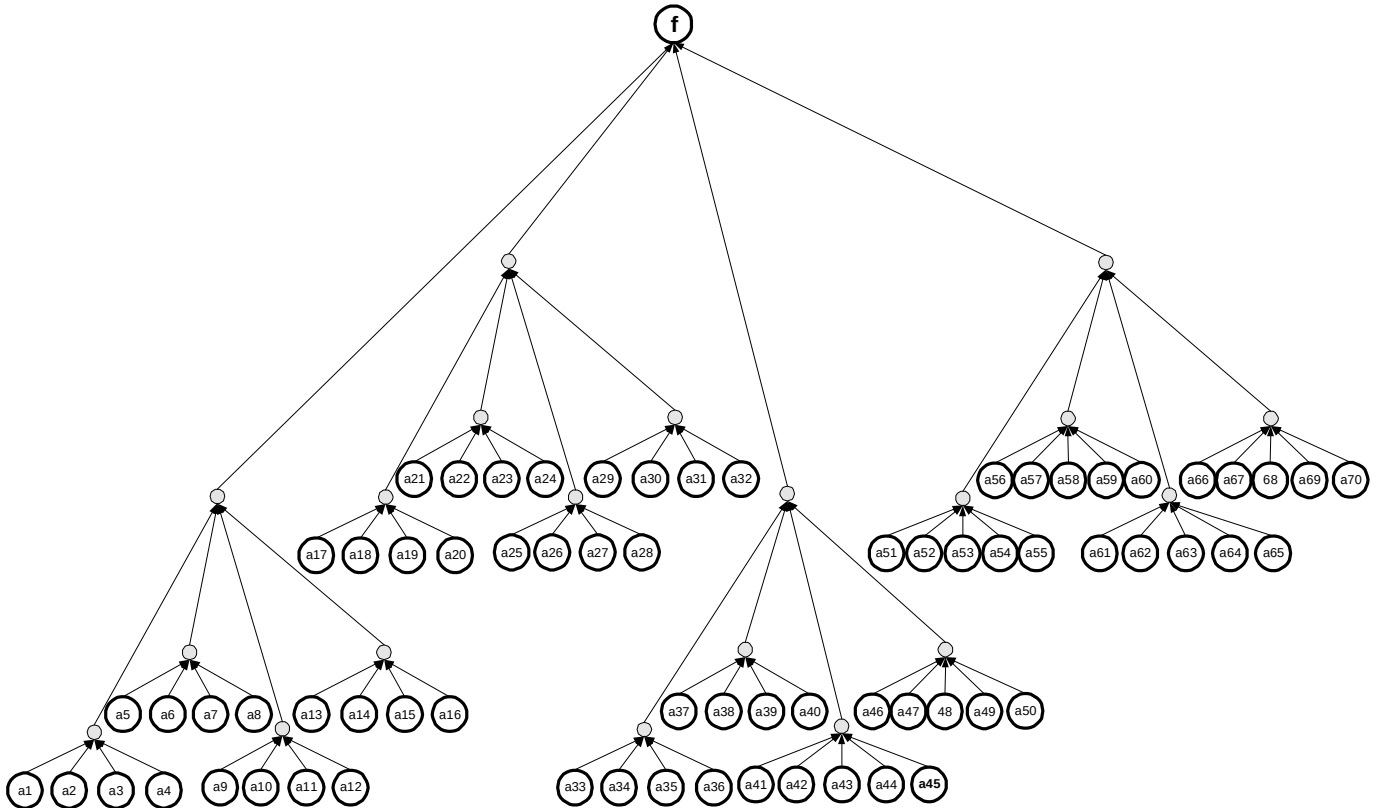


Рис. 3.5. Оптимальное на $D(f)$ дерево организации группы $f = \{a_1, \mathbf{K}, a_{70}\}$.

Оптимальное дерево изображено на рис. 3.5. При $n = 25$, $n = 125$ и $n = 625$ ¹ оптимально симметричное 5-дерево, в котором каждая управляющая вершина имеет 5 подчиненных. При рассмотренном значении $n = 70$ элементы $a_1, \mathbf{K}, a_{40}$ группируются в четверки, элементы $a_{41}, \mathbf{K}, a_{70}$ группируются в пятерки. То есть все элементы подчиняются шестнадцати управляющим вершинам нижнего уровня, которые затем группируются в f с помощью симметричного 4-дерева.

При приближении b к единице функционал “приближается” к вогнутому и становится оптимальной веерная организация. При увеличении b становится оптимальной 2-организация (в

¹ При $n = 125$ и $n = 625$ решение найдено эвристическим алгоритмом пункта 2 §2.

рассматриваемом примере при $b \geq 3$). Следовательно, численные эксперименты позволяют предположить, что для любого r можно подобрать такое b , при котором будет оптимальна симметричная r -организация (для $n = r^i$, то есть для соответствующего количества элементов).

Таким образом, построенные алгоритмы позволяют анализировать закономерности поведения оптимального дерева организации в зависимости от параметров функционала.

4. Оценка сложности задачи на $D_r(f)$ при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Алгоритм решения.

Следующее утверждение представляет собой аналог утверждения 3.5 для $D_r(f)$.

Утверждение 3.7. Алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$, $|f| = n \geq 4$ с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, должен проанализировать не менее $\tilde{q}(n, r)$ значений функционала P . Любой алгоритм, анализирующий менее $\tilde{q}(n, r)$ значений P , может выдать решение, стоимость которого сколь угодно больше стоимости оптимального r -дерева.

Доказательство. Зададим функционал $P'(g_1, \mathbf{K}, g_k)$ стоимости организации подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$ в группу $g = g_1 \cup \mathbf{K} \cup g_k$ в соответствии с формулой (3.4) (см. утв. 3.5). Тогда любое r -дерево $D \in D_r(f)$ имеет стоимость y . Предположим, что алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве на $D_r(f)$, анализирует менее $\tilde{q}(n, r)$ значений P . Применим его для решения задачи с функционалом P' . Обозначим полученное r -дерево через $D' \in D_r(f)$. Найдется такой набор подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, $f = h_1 \cup \mathbf{K} \cup h_j$, $j \leq r$, что все варианты организации f , стоимость которых проанализирует алгоритм, будут существенно отличаться от $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Если в D' набор $Q_{D'}(f)$ существенно отличается от $h_1, \mathbf{K}, h_j$, то зададим функционал P'' в соответствии с формулой (3.5), иначе, выбрав произвольное $z > y$, зададим функционал P'' в соответствии с формулой (3.6) (см. утв. 3.5).

Применим алгоритм для решения задачи с функционалом P'' . Мы изменили значения функционала только для тех вариантов организации f , которые несущественно отличаются от $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Эти значения алгоритм не анализировал. Следовательно, в качестве решения опять будет выдано r -дерево D' . При первом варианте выбора P'' r -деревья из $D_r(f)$, в которых группа f организуется из подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_j$, имеют нулевую стоимость, а $P(D') = y$. При втором варианте выбора P'' в силу $n \geq 4$ ¹ в $D_r(f)$ существует по крайней мере одно r -дерево, в котором группа f организуется из набора подгрупп, существенно отличающегося от $h_1, \mathbf{K}, h_j$. Стоимость такого r -дерева равна y , а $P(D') = z$. В обоих случаях стоимость выданного решения может быть сколь угодно большей, чем стоимость оптимального r -дерева. Утверждение доказано.

Лемма 3.4. Если функционал имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и при каждом $i = \overline{2, n}$ для некоторой группы g мощности i известно ее разбиение $Q(g)$ в некотором оптимальном r -дереве $D_g \in D_r(g)$ организации g , то можно построить оптимальное на $D_r(f)$ r -дерево организации f , $|f| = n$, не вычисляя значений функционала стоимости.

Доказательство проводится повторением доказательства леммы 3.3 с точностью до замены слов “дерево” на “ r -дерево” и множества $D(f)$ на $D_r(f)$. Лемма доказана.

Доказательство следующего утверждения дает алгоритм поиска оптимального r -дерева на $D_r(f)$ ² с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и его сложность.

Утверждение 3.8. Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном r -дереве организации на $D_r(f)$, $|f| = n$ с

¹ При $n=3$ и $r=2$ все варианты разбиения группы мощности три на две подгруппы не являются существенно различными, так как одна подгруппа имеет мощность один, другая – мощность два (см. рис. 3.1).

² Аналогичным образом строится алгоритм поиска оптимального на $D_r(f)$ дерева с уровнем не более L (см. сноску перед утв. 3.2).

функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ за $\tilde{s}(n, r) = \sum_{i=2, n} \tilde{q}(i, r)$ вычислений P .

Доказательство. Проводится повторением доказательства утверждения 3.6 с точностью до замены слов “дерево” на “ r -дерево”, множества $D(f)$ на $D_r(f)$, величин $\tilde{q}(i)$ и $\tilde{s}(n)$ соответственно на $\tilde{q}(i, r)$ и $\tilde{s}(n, r)$, ссылки на лемму 3.3 ссылкой на лемму 3.4. Утверждение доказано.

Поясним утверждения 3.7 и 3.8 на примере (см. рис. 3.1). Предположим, что необходимо найти оптимальное 2-дерево. Тогда подходят только три варианта разбиения $f = \{a_1, a_2, a_3\}$, изображенные слева. Все эти три варианта имеют одинаковую стоимость, поэтому функционал можно не вычислять вообще, а выбрать любое дерево в качестве оптимального. По этой причине в утверждении 3.7 введено условие $|f| = n \geq 4$, которое гарантирует, что при разбиении f найдутся по крайней мере два существенно различных варианта. Построенный алгоритм (см. утв. 3.8) вычислит $\tilde{s}(3, 2) = \tilde{q}(3, 2) + \tilde{q}(2, 2) = 2$ значения функционала и найдет стоимость оптимального дерева.

Утверждение 3.9. Выполнено неравенство $\tilde{s}(n, r) < n^r$.

Доказательство. $\tilde{q}(n, r)$ – количество способов нетривиального разбиения группы из n элементов на существенно различные наборы из r или менее подгрупп. Выбирая всевозможным образом мощности подгрупп $i_1, \mathbf{K}, i_r$, переберем все существенно различные наборы из r или менее подгрупп. При этом $i_1 + \mathbf{K} + i_r = n$, $0 \leq i_j < n$ для $j = \overline{1, r}$. Тогда оценим $\tilde{q}(n, r)$ следующим образом: имеется n вариантов выбора i_1 , n вариантов выбора i_2 , и так далее, n вариантов выбора i_{r-1} . После этого вычислим $i_r = n - i_1 - \mathbf{K} - i_{r-1}$. Всего имеем n^{r-1} вариантов. При этом очевидно, что многие из них не будут допустимы (может быть $i_r < 0$), варианты с одними и теми же, но переставленными местами мощностями, считаются разными. Таким образом, n^{r-1} – верхняя оценка величины $\tilde{q}(n, r)$. Далее имеем $\tilde{s}(n, r) = \sum_{i=2, n} \tilde{q}(i, r) \leq (n-1)\tilde{q}(n, r) < n^r$. Утверждение доказано.

Из утверждений 3.8 и 3.9 можно сделать вывод, что при каждом r существует полиномиальный по n алгоритм поиска оптимального r -дерева на $D_r(f)$ с функционалом стоимости вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Однако при большом r степень полинома может быть высокой.

§2. Приближенное решение задачи об оптимальном дереве на $D(f)$.¹

1. Эвристический алгоритм со сложностью порядка n^2 при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Описание алгоритма. Последовательно рассмотрим значения $i = \overline{2, n}$. Предположим, что при каждом $t = \overline{1, i-1}$ ² для некоторой группы g_t мощности t известно ее разбиение $Q(g_t)$ в некотором дереве $D_t \in D(g_t)$ организации g_t и стоимость этого дерева $P(D_t)$. Рассмотрим группу $g_i = \{a_1, \mathbf{K}, a_i\}$ мощности i . Для $l = \overline{1, i-1}$ через h' обозначим подгруппу $h' = \{a_1, \mathbf{K}, a_l\}$ мощности l , а через h'' обозначим подгруппу $h'' = \{a_{l+1}, \mathbf{K}, a_i\}$ мощности $i-l$. Проанализируем следующие существенно различные варианты разбиения g_i на подгруппы:

а) Если $l < i-1$, то известно разбиение $Q(g_{i-l})$ группы g_{i-l} мощности $i-l$ в дереве D_{i-l} . Построим разбиение $\{h_1, \mathbf{K}, h_s\}$ группы h'' , которое несущественно отличается от $Q(g_{i-l})$. Рассмотрим вариант разбиения g_i на подгруппы $Q'(g_i) = \{h', h_1, \mathbf{K}, h_s\}$. Мощность всех подгрупп $h', h_1, \mathbf{K}, h_s$ меньше i . Для всех групп такой мощности известны стоимости некоторых деревьев

¹ Все алгоритмы данного параграфа можно использовать для решения задачи на $D_r(f)$, рассматривая в процессе поиска решения лишь разбиения группы на r или менее подгрупп и игнорируя остальные варианты. Описание таких алгоритмов повторяет настоящий параграф почти дословно.

² При минимальном $i = 2$ предположение выполнено, так как дерево организации элементарной группы состоит из одной изолированной вершины и имеет нулевую стоимость.

организации $P(D_{|h'|}), P(D_{|h_1|}), \mathbf{K}, P(D_{|h_s|})$.¹ Тогда можно вычислить стоимость $P' = P(Q'(g_i)) + P(D_{|h'|}) + P(D_{|h_1|}) + \mathbf{K} + P(D_{|h_s|})$ дерева организации g_i , в котором g_i разбивается на подгруппы $Q'(g_i)$.

б) Если $l \leq i/2$, то рассмотрим вариант разбиения g_i на подгруппы $Q''(g_i) = \{h', h''\}$ ² и вычислим стоимость соответствующего дерева $P'' = P(Q''(g_i)) + P(D_{|h'|}) + P(D_{|h''|})$.

При каждом возможном l сравним значения P', P'' , для которых реализуются соответствующие случаи а), б), и выберем минимальное по всем l значение $P_{\min}$. Положим $P_k = P_{\min}$ и запомним соответствующее разбиение $Q(g_i)$ группы g_i .

Проделав вышеуказанные действия последовательно для всех $i = \overline{2, n}$, найдем разбиения $Q(g_2), \mathbf{K}, Q(g_n)$ групп $g_2, \mathbf{K}, g_n$ в некоторых деревьях $D_2, \mathbf{K}, D_n$ и стоимости $P(D_2), \mathbf{K}, P(D_n)$ этих деревьев. После этого по аналогии с доказательством леммы 3.3 можно, не вычисляя функционала стоимости, построить дерево организации f , $|f| = n$ со стоимостью $P(D_n)$. Это дерево и считаем решением задачи. Алгоритм построен.

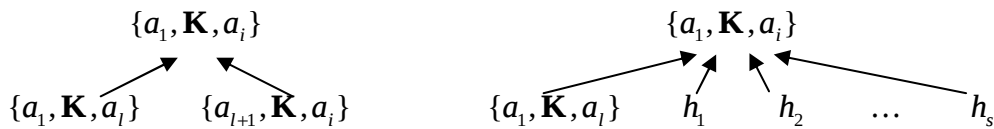


Рис. 3.6. Варианты разбиения, анализируемые эвристическим алгоритмом.

Рис. 3.6 поясняет построенный алгоритм и его отличия от точного алгоритма (см. утв. 3.6), в котором анализируются все существенно различные варианты разбиения группы $g_i = \{a_1, \mathbf{K}, a_i\}$. Эвристический алгоритм анализирует все существенно различные варианты разбиения $\{a_1, \mathbf{K}, a_i\}$ на две подгруппы (см. п. б в описании алгоритма и рис. 3.6 слева). Кроме того, для каждого $l < i-1$ известно разбиение $h_1, \mathbf{K}, h_s$ группы $\{a_{i+1}, \mathbf{K}, a_i\}$ мощности $i-l$ на подгруппы в некотором дереве D_{i-l} ,

¹ Если $P(D_t)$ – стоимость некоторого дерева организации группы мощности t , то для всех остальных групп такой же мощности существуют деревья их организации со стоимостью $P(D_t)$ в силу вида функционала.

² Не рассмотрев такие случаи, мы проанализируем лишь варианты организации g из трех и более подгрупп.

найденном на предыдущих шагах. Эвристический алгоритм анализирует вариант разбиения $\{a_1, \mathbf{K}, a_i\}$ на $\{a_1, \mathbf{K}, a_l\}$ и $h_1, \mathbf{K}, h_s$ (см. п. а в описании алгоритма и рис. 3.6 справа).

Утверждение 3.10. Построенный алгоритм требует не более $(n-1)(3n-2)/4$ вычислений функционала стоимости.

Доказательство. Для каждого i алгоритм требует не более $(3i/2) - 2$ вычислений функционала P . Просуммируем по i : $3 \cdot (\sum_{i=2, n} i) / 2 - 2(n-1) = (n-1)(3(n+2)/4 - 2)$. Утверждение доказано.

Утверждение 3.11. Построенный алгоритм находит оптимальное дерево для выпуклого на наборах непересекающихся групп функционала стоимости¹.

Доказательство проведем индукцией по мощности организуемой группы. Если мощность равна двум, то алгоритм найдет оптимальное дерево, так как оно единственно. Предположим, что для любой группы мощности $t < i$ алгоритм находит оптимальное дерево организации. Рассмотрим группу g_i мощности i .

Если функционал выпуклый на наборах непересекающихся групп, то существует оптимальное на $D(g_i)$ 2-дерево D_2^* организации g_i (см. следствие 1 к теор. 1.5). В D_2^* группа g_i организуется из двух подгрупп с мощностями s и $i-s$ для некоторого $1 \leq s \leq i/2$. Алгоритм проанализирует вариант организации g_i , который не существенно отличается от $Q_{D_2^*}(g_i)$ (см. описание алгоритма). По предположению для подгрупп мощности s и $i-s$ известны оптимальные деревья организации и их стоимость. Следовательно, будет найдена стоимость $P(D_i)$ некоторого дерева $D_i \in D(g_i)$, причем $P(D_i) = P(D_2^*)$. То есть алгоритм в итоге найдет оптимальное дерево организации группы g_i . Утверждение доказано.

Построенный алгоритм вычисляет меньше значений функционала стоимости, чем минимально возможное количество

¹ При этом найденное оптимальное дерево может не быть 2-деревом, так как в общем случае могут существовать и оптимальные деревья другого вида.

$\tilde{q}(n)$ вычислений точным алгоритмом (см. утв. 3.5). Следовательно, в общем случае погрешность алгоритма сколь угодно велика. Поэтому при его использовании необходимо тестирование алгоритма для конкретного функционала. Для выпуклого функционала алгоритм находит точное решение (см. утв. 3.11). Для вогнутого функционала всеерная организация оптимальна на $D(f)$ (см. следствие к теор. 1.6). Таким образом, тестирование алгоритма целесообразно проводить для функционала, который не является ни выпуклым, ни вогнутым. Например, это функционал (II) с функцией сложности вида (2.2) в области параметров $a < 1$, $b > 1$ (см. §2 гл. II). Ниже приведем пример тестирования алгоритма в этой области.

Ограничимся значениями $n = 5, 6, \mathbf{K}, 30$ и диапазоном $(a, b) \in [0,5; 1) \times (1; 2]$, разбив его сеткой с узлами $(a, b) = (1/(1 + 0,1i); 1 + 0,1j)$, $i, j = \overline{1,10}$.¹ Для того, чтобы функционал имел вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, должно выполняться $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_n)$ (см. §2 гл. II). Функционал (II) однороден, поэтому при изменении масштаба сложностей стоимости всех деревьев умножаются на константу (см. опр. 2.3), что не меняет относительной погрешности. Поэтому считаем сложности всех элементов равными единице.

Обозначим стоимость найденного эвристическим алгоритмом дерева через $P_{\text{эвр}}(n)$, стоимость оптимального дерева через $P_{\text{опт}}(n)$, погрешность алгоритма через $x(n) = 100\% \cdot (P_{\text{эвр}}(n) - P_{\text{опт}}(n)) / P_{\text{опт}}(n)$. Среднюю по всем тестируемым вариантам погрешность обозначим через $\bar{x}$, среднеквадратичное отклонение – через dx , максимальную погрешность – через $\max x$. Через $(a_{\max}; b_{\max})$ обозначим значения параметров, при которых погрешность максимальна. Результаты приведены в таблице 3.7.

На рис. 3.7 приведен график изменения погрешности при $n = \overline{2,50}$ для параметров $(a_{\max}; b_{\max})$. Как видно из рисунка, при росте n погрешность, достигнув своего максимума, уменьшается, что позволяет предположить такое же поведение при дальнейшем

¹ При описании некоторой реальной задачи параметры функционала определяются с некоторой погрешностью. Следовательно, значения параметров можно привязать к узлам некоторой сетки, что оправдывает тестирование алгоритма без оценки колебаний погрешности между узлами.

росте n . Максимальная погрешность алгоритма в тестируемой области не превосходит 10%. В то же время максимум погрешности достигается на границе области при $b = 2$. При увеличении b погрешность нарастает. Допустимость использования эвристического алгоритма определяется в каждом конкретном случае, исходя из максимально допустимой погрешности.

$\max x, \%$	$\bar{x}, \%$	$dx, \%$	$(a_{\max}; b_{\max})$
9,696	1,449	2,250	(0,714; 2)

Таблица 3.7. Относительная погрешность алгоритма для функционала (II).

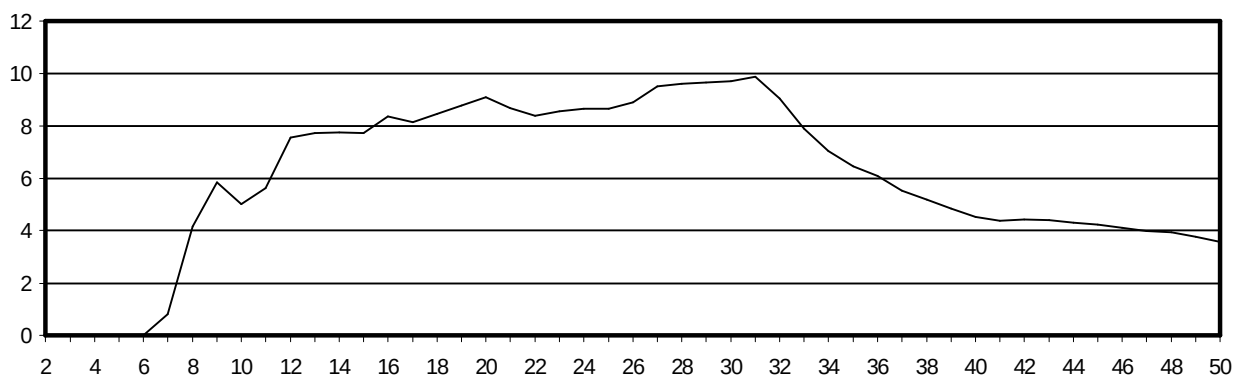


Рис. 3.7. Относительная погрешность алгоритма при возрастании $n, \%$.

2. Эвристический алгоритм со сложностью порядка $n^2 \log n$ при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Описание алгоритма. Последовательно рассмотрим значения $i = \overline{2, n}$. Предположим, что при каждом $t = \overline{1, i-1}^1$ и каждом $j = \overline{1, \lfloor t/2 \rfloor}$ для некоторой группы g_t мощности t известно ее разбиение $Q_{t,j}$ на подгруппы мощности не менее j в некотором дереве $D_{t,j} \in D(g_t)$ организации g_t , а также стоимость этого дерева $P(D_{t,j})$.

Рассмотрим группу $g_i = \{a_1, \mathbf{K}, a_i\}$ мощности i и последовательно для всех j от $\lfloor i/2 \rfloor$ до 1 построим разбиения $Q_{i,j}$

¹ При минимальном $i = 2$ предположение выполнено, так как дерево организации элементарной группы состоит из одной изолированной вершины и имеет нулевую стоимость.

следующим образом. При разбиении g_i на подгруппы мощности не менее j используется некоторое количество k подгрупп с мощностью, равной j . Возможные значения k определяются соотношением (3.8) (см. п.3 §1). Выбрав k , обозначим через $l = i - kj$ мощность оставшейся подгруппы и проанализируем следующие существенно различные варианты разбиения g_i на подгруппы:

а) Если $l = 0$, то рассмотрим разбиение $Q'(g_i)$ группы g_i на k подгрупп с одинаковой мощностью j . Каждая из подгрупп $Q'(g_i)$ имеет мощность $j < i$, следовательно ее можно организовать с помощью дерева $D_{j,1}$, стоимость которого по предположению нам известна. Тогда существует дерево организации g_i со стоимостью $P' = P(Q'(g_i)) + kP(D_{j,1})$.

б) Если $0 < l < i$, то рассмотрим разбиение $Q''(g_i)$ группы g_i на k подгрупп с одинаковой мощностью j и подгруппу мощности l . Тогда существует дерево организации g_i со стоимостью $P'' = P(Q''(g_i)) + kP(D_{j,1}) + P(D_{l,1})$ (мощность подгрупп из $Q''(g_i)$ менее i).

с) Если $j+1 \leq \lfloor l/2 \rfloor$, то рассмотрим разбиение $Q'''(g_i) = \{h_1, \mathbf{K}, h_k\} \cup Q_{l,j+1}$ группы g_i на k подгрупп $h_1, \mathbf{K}, h_k$ мощности j и подгруппы $Q_{l,j+1}$ мощности $j+1$ или более, из которых организуется группа мощности l в дереве $D_{l,j+1}$. Тогда существует дерево организации g_i со стоимостью $P'' = P(Q'''(g_i)) + kP(D_{j,1}) + \sum_{h \in Q_{l,j+1}} P(D_{|h|,1})$ (мощность подгрупп из $Q'''(g_i)$ менее i).

д) При $j = 1$ также рассмотрим разбиение $Q'''(g_i)$ группы g_i на две подгруппы с мощностями s и $i - s$ для $s = 1, \lfloor i/2 \rfloor$. Тогда существует дерево организации g_i со стоимостью $P''' = P(Q'''(g_i)) + P(D_{s,1}) + P(D_{i-s,1})$ (мощность подгрупп из $Q'''(g_i)$ менее i).

При каждом возможном k сравним значения P' , P'' , P''' , для которых реализуются соответствующие случаи а), б), с), и выберем минимальное по всем k . В случае $j = 1$ сравним найденное значение со значениями P''' . Выберем минимальное значение $P_{\min}$. Набором $Q_{i,j}$ считаем набор, соответствующий значению $P_{\min}$. Тогда существует дерево $D_{i,j}$ организации группы g_i , в

котором g_i разбивается на подгруппы $Q_{i,j}$, причем стоимость дерева $P(D_{i,j}) = P_{\min}$ нам известна.

Проделав вышеуказанные действия последовательно для всех $j = \overline{[i/2], 1}$ и для всех $i = \overline{2, n}$, найдем разбиения $Q_{2,1}, Q_{3,1}, \mathbf{K}, Q_{n,1}$ групп $g_2, g_3, \mathbf{K}, g_n$ в некоторых деревьях $D_{2,1}, D_{3,1}, \mathbf{K}, D_{n,1}$ и стоимости $P(D_{2,1}), P(D_{3,1}), \mathbf{K}, P(D_{n,1})$ этих деревьев. После этого по аналогии с доказательством леммы 3.3 можно, не вычисляя функционала стоимости, построить дерево организации f , $|f| = n$ со стоимостью $P(D_{n,1})$. Это дерево и считаем решением задачи. Алгоритм построен.

Построенный алгоритм анализирует большее количество вариантов, чем алгоритм пункта 1. Кроме всевозможных вариантов существенно различного разбиения группы мощности i на две подгруппы (см. рис. 3.6 слева и п. d описания), алгоритмом при каждом j от $[i/2]$ до 1 выбирается допустимое число k подгрупп мощности j , а оставшаяся часть мощности l разбивается на подгруппы мощности $j+1$ и более. При этом используется разбиение в дереве $D_{l,j+1}$, найденном на предыдущих шагах (см. п. с описания алгоритма). Также анализируется вариант разбиения на k подгрупп мощности j и оставшуюся подгруппу мощности l (см. п.п. а и b описания алгоритма).

Утверждение 3.12. Порядок сложности¹ построенного алгоритма не превосходит $n^2 \log(n)$.

Доказательство. Для фиксированных $i, j > 1$ алгоритм вычисляет не более $2(i/j)$ значений функционала. При $j = 1$ функционал вычисляет не более $3i = i + 2(i/j)$ значений функционала. Суммируя по j , имеем $i + 2i \sum_{j=1, [i/2]} 1/j \leq i(1 + 2 \sum_{j=1, [n/2]} 1/j)$. Тогда, суммируя по i от 2 до n , получим, что общее количество вычислений функционала не превосходит $(1 + 2 \sum_{j=1, [n/2]} 1/j)(n+2)(n-1)/2$. Учитывая логарифмический порядок

¹ Под сложностью алгоритма подразумевается количество вычислений функционала стоимости.

роста суммы гармонического ряда при увеличении n , оценим порядок сложности алгоритма величиной $n^2 \log(n)$. Утверждение доказано.

Утверждение 3.13. Построенный алгоритм находит оптимальное дерево для выпуклого или вогнутого на наборах непересекающихся групп функционала стоимости¹.

Доказательство проведем индукцией по мощности организуемой группы. Если мощность равна двум, то алгоритм найдет оптимальное дерево, так как оно единственно. Предположим, что для любой группы g_t мощности $t < i$ стоимость найденного алгоритмом дерева $D_{t,1} \in D(g_t)$ равна стоимости оптимального дерева на $D(g_t)$. Рассмотрим группу g_i мощности i .

Если функционал выпуклый на наборах непересекающихся групп, то существует оптимальное на $D(g_i)$ 2-дерево D_2^* организации g_i (см. следствие 1 к теор. 1.5). В D_2^* группа g_i организуется из двух подгрупп с мощностями s и $i-s$ для некоторого $1 \leq s \leq i/2$. При $j=1$ согласно пункту d) описания алгоритма будет проанализирован вариант организации g_i , который не существенно отличается от $Q_{D_2^*}(g_i)$. По предположению для подгрупп мощности s и $i-s$ известны стоимости оптимальных деревьев организации. Следовательно, для найденной алгоритмом стоимости $P(D_{i,1})$ дерева $D_{i,1} \in D(g_i)$ выполнено равенство $P(D_{i,1}) = P(D_2^*)$. В результате алгоритм найдет оптимальное дерево организации группы g_i .

Если функционал вогнутый на наборах непересекающихся групп, то веерная организация группы g_i оптимальна. При $j=1$ и $k=i$ будет выполнено $l=0$. Следовательно, согласно пункту a) описания алгоритма будет проанализирован вариант организации g_i из i элементарных подгрупп, то есть веерная организация g_i . Найденная алгоритмом стоимость $P(D_{i,1})$ дерева $D_{i,1} \in D(g_i)$ будет, таким образом, равна стоимости веерной организации. В

¹ При этом найденное для выпуклого или вогнутого функционала оптимальное дерево может не быть соответственно 2-деревом и веерной организацией, так как в общем случае могут существовать и оптимальные деревья другого вида.

результате алгоритм найдет оптимальное дерево организации группы g_i . Утверждение доказано.

Как и для алгоритма пункта 1, погрешность построенного алгоритма в общем случае сколь угодно велика. Поэтому при его использовании необходимо тестирование для конкретного функционала. Для выпуклого или вогнутого функционала алгоритм находит точное решение (см. утв. 3.13). Таким образом, тестирование алгоритма целесообразно проводить для функционала, который не является ни выпуклым, ни вогнутым. Как и в пункте 1 проведем тестирование для функционала (II) с функцией сложности вида (2.2) в области $a < 1$, $b > 1$ (см. §2 гл. II). Параметры тестирования алгоритма аналогичны описанным в пункте 1. Аналогичные таблице 3.7 результаты приведены в таблице 3.8.

$\max x$, %	$\bar{x}$, %	dx , %	$(a_{\max}; b_{\max})$
1,159	0,0142	0,0670	(0,556; 1,8)

Таблица 3.8. Относительная погрешность алгоритма для функционала (II).

Как видно из таблицы, построенный алгоритм дает много лучшие результаты, чем алгоритм пункта 1 (максимальная погрешность снижается на порядок), несмотря на незначительное увеличение порядка сложности ($n^2 \log n$ по сравнению с n^2). При этом, в отличие от алгоритма пункта 1, максимальная погрешность достигается не на границе исследованной области параметров, а внутри ее ($a_{\max} = 0,556$, $b_{\max} = 1,8$). При $(a_{\max}; b_{\max})$ погрешность отлична от 0 лишь при $n = 7, 19, 22, 23, 25$ в диапазоне изменения n от 2 до 50. То есть можно аналогично пункту 1 предположить невозрастание максимальной погрешности при дальнейшем росте n .

3. Первый эвристический алгоритм решения общей задачи.

В данном пункте описывается эвристический алгоритм для функционала общего вида, аналогичный алгоритму пункта 1 для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Отличия состоят в том, что

для каждой подгруппы строится дерево ее организации (а не для одной подгруппы на каждую мощность), кроме того анализируются произвольные варианты разбиения группы, а не только существенно различные.

Описание алгоритма. Последовательно рассмотрим значения $i = \overline{2, n}$. Предположим, что при каждом $t = \overline{1, i-1}$ ¹ для всех групп h мощности t известно некоторое дерево $D_h \in D(h)$ организации h и его стоимость $P(D_h)$. Рассмотрим группу g мощности i и все варианты нетривиального² разбиения g на две непересекающиеся подгруппы g_1 и g_2 . Мощность g_1 и g_2 меньше i , следовательно для них известны деревья D_{g_1} и D_{g_2} и их стоимости $P(D_{g_1})$ и $P(D_{g_2})$. Проанализируем следующие варианты разбиения g :

а) Рассмотрим $Q'(g) = \{g_1, g_2\}$. Этому разбиению соответствует дерево организации g со стоимостью $P' = P(Q'(g)) + P(D_{g_1}) + P(D_{g_2})$.

б) Если $|g_1| > 1$, то рассмотрим $Q''(g) = \{g_2\} \cup Q_{D_{g_1}}(g_1)$. Этому разбиению соответствует дерево организации g со стоимостью $P'' = P(Q''(g)) + \sum_{h \in Q''(g)} P(D_h)$.

с) Если $|g_2| > 1$, то рассмотрим $Q'''(g) = \{g_1\} \cup Q_{D_{g_2}}(g_2)$. Этому разбиению соответствует дерево организации g со стоимостью $P''' = P(Q'''(g)) + \sum_{h \in Q'''(g)} P(D_h)$.

Для каждой пары подгрупп g_1 и g_2 сравним значения P' , P'' , P''' , для которых реализуются соответствующие случаи а), б), с), и выберем минимальное по всем парам значение $P_{\min}$. В результате найдем дерево $D_g \in D(g)$, стоимость которого $P(D_g) = P_{\min}$.

Проделав вышеуказанные действия для всех групп мощности i , перейдем к следующему значению i . И так далее. В итоге последовательно решим задачу для всех $i = \overline{2, n}$. После этого

¹ При минимальном $i = 2$ предположение верно, так как дерево организации элементарной группы состоит из одной изолированной вершины и имеет нулевую стоимость.

² То есть группа разбивается на две или более подгруппы.

дерево D_f считаем решением задачи об оптимальном дереве организации f , $|f| = n$. Алгоритм построен (назовем его первым эвристическим).

Утверждение 3.14. Количество $s_{\text{эвп1}}(n)$ вычислений функционала стоимости первым эвристическим алгоритмом оценивается величиной $s_{\text{эвп1}}(n) \leq 3 \sum_{i=2, n} C_n^i q(i, 2) = 3s(n, 2)$.

Доказательство. При каждом i алгоритм анализирует C_n^i групп g мощности i . Существует $q(i, 2)$ вариантов нетривиального разбиения g на две подгруппы. Для каждого варианта вычислим функционал стоимости не более 3 раз. Утверждение доказано.

Таким образом, сложность первого эвристического алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$ не более чем в три раза превосходит сложность переборного алгоритма поиска оптимального 2-дерева на $D_2(f)$ (см. таблицу 3.3).

Утверждение 3.15. Первый эвристический алгоритм находит оптимальное дерево для выпуклого на наборах непересекающихся групп функционала стоимости¹.

Доказательство проведем индукцией по мощности организуемой группы. Если мощность равна двум, то алгоритм найдет оптимальное дерево, так как оно единственно. Предположим, что для любой группы мощности $t < i$ алгоритм находит оптимальное дерево организации. Рассмотрим группу g мощности i .

Функционал выпуклый на наборах непересекающихся групп, то есть существует оптимальное на $D(g)$ 2-дерево D_2^* организации g (см. следствие 1 к теор. 1.5). В D_2^* группа g организуется из некоторой пары подгрупп g_1 и g_2 . В силу пункта а) описания алгоритма будет проанализирован вариант организации g из g_1 и g_2 . По предположению для g_1 и g_2

¹ При этом найденное оптимальное дерево может не быть 2-деревом, так как в общем случае могут существовать и оптимальные деревья другого вида.

известны оптимальные деревья организации и их стоимость. Следовательно, найденное алгоритмом дерево $D_g \in D(g)$ оптимально: $P(D_g) = P(D_2^*)$. В итоге алгоритм найдет оптимальное дерево организации группы f . Утверждение доказано.

Построим еще один эвристический алгоритм, после чего совместно протестируем работу обоих алгоритмов (см. таблицу 3.9).

4. Второй эвристический алгоритм решения общей задачи.

В данном пункте описывается эвристический алгоритм для функционала общего вида, в некотором смысле аналогичный алгоритму пункта 2 для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Описание алгоритма. Последовательно рассмотрим значения $i = \overline{2, n}$. Предположим, что при каждом $t = \overline{1, i-1}$ для каждой группы h мощности t известны некоторые деревья $D_{h,j} \in D(h)$, $j = \overline{1, t-1}$ организации h и их стоимости $P(D_{h,j})$.¹ Таким образом, для каждой группы мощности t известно $t-1$ дерево организации². Рассмотрим группу g мощности i . Последовательно выберем j от $i-1$ до 1. При каждом j рассмотрим всевозможные подгруппы $g_1 \subset g$ мощности j . Обозначим оставшуюся подгруппу через $g_2 = g \setminus g_1$. Проанализируем следующие варианты разбиения g :

а) Положим $Q'(g) = \{g_1, g_2\}$. Этому разбиению поставим в соответствие дерево организации g со стоимостью: $P' = P(Q'(g)) + P(D_{g_1,1}) + P(D_{g_2,1})$.

б) Если $|g_2| > 1$, то для всех $s = \overline{1, |g_2|-1}$ положим $Q_s''(g) = \{g_1\} \cup Q_{D_{g_2,s}}(g_2)$. Этим разбиениям поставим в соответствие

¹ При минимальном $i = 2$ считаем известным дерево $D_{h,1}$ нулевой стоимости, состоящее из одной изолированной элементарной вершины h .

² Способ построения деревьев конкретизируется ниже при описании алгоритма.

деревья организации g стоимости $P_s'' = P(Q_s''(g)) + \sum_{h \in Q_s''(g)} P(D_{h,1})$.

Для всевозможных подгрупп $g_1 \subset g$ мощности j сравним значения P' , P_s'' при $s = 1, \overline{|g_2| - 1}$ и выберем минимальное по всем подгруппам $g_1 \subset g$ значение. При $j < i - 1$ сравним его со стоимостью найденного на предыдущем шаге дерева $D_{g,j+1}$ и выберем минимальную стоимость $P_{\min}$. Соответствующее дерево и примем в качестве дерева $D_{g,j} \in D(g)$, $P(D_{g,j}) = P_{\min}$. Прделав вышеуказанные действия последовательно для всех j от $i - 1$ до 1, найдем деревья $D_{g,i-1}, D_{g,i-2}, \dots, D_{g,1}$. После этого находим аналогичные деревья для следующей группы мощности i . И так далее. Построив деревья для всех групп мощности i , перейдем к следующему значению i . В итоге последовательно решим задачу для всех $i = \overline{2, n}$. После этого дерево $D_{f,1}$ считаем решением задачи об оптимальном дереве организации f , $|f| = n$. Алгоритм построен (назовем его вторым эвристическим).

Утверждение 3.16. Количество $s_{\text{эвр}2}(n)$ вычислений функционала стоимости вторым эвристическим алгоритмом оценивается величиной $s_{\text{эвр}2}(n) \leq 2 \sum_{i=\overline{2,n}} C_n^i q(i,2)i$.

Доказательство. При каждом i алгоритм анализирует C_n^i групп g мощности i . Для каждой группы g при всех j от $i - 1$ до 1 последовательно выберем всевозможные подгруппы $g_1 \subset g$ мощности j . Общее количество таких подгрупп $2^i - 2 = 2q(i,2)$. Для каждой выбранной подгруппы рассмотрим не более i вариантов разбиения g , то есть вычислим функционал стоимости не более i раз. Утверждение доказано.

Таким образом, выполнено $s_{\text{эвр}2}(n) < 2ns(n,2)$. То есть сложность второго эвристического алгоритма поиска оптимального дерева на $D(f)$ не более чем в $2n$ раз превосходит сложность переборного алгоритма поиска оптимального 2-дерева на $D_2(f)$ (см. таблицу 3.3). При $n \leq 20$ выполнено $s_{\text{эвр}2}(n) < 10s_{\text{эвр}1}(n)$. То есть в том диапазоне, где сложность алгоритмов остается

приемлемой, второй эвристический алгоритм не более чем на порядок сложнее первого.

Утверждение 3.17. Второй эвристический алгоритм находит оптимальное дерево для выпуклого на наборах непересекающихся групп функционала стоимости¹.

Доказательство. Второй эвристический алгоритм, также как и первый, анализирует все варианты организации группы из двух подгрупп. Следовательно, доказательство полностью аналогично доказательству утверждения 3.15. Утверждение доказано.

Первый и второй эвристические алгоритмы вычисляют меньше значений функционала стоимости, чем минимально возможное количество $q(n)$ вычислений точным алгоритмом (см. утв. 3.1). Следовательно, в общем случае погрешность алгоритмов сколь угодно велика. Поэтому при их использовании необходимо тестирование для конкретного функционала. Для выпуклого функционала алгоритмы находят точное решение (см. утв. 3.15, 3.17). Для вогнутого функционала веерная организация оптимальна на $D(f)$ (см. следствие к теор. 1.6). Таким образом, тестирование алгоритма целесообразно проводить для функционала, который не является ни выпуклым, ни вогнутым.

Как и в пунктах 1 и 2, протестируем алгоритмы для функционала (II) с функцией сложности вида (2.2) (см. §2 гл. II) в области параметров $(a, b) \in [0,5; 1) \times (1; 2]$. Разобьем диапазон сеткой с узлами $(a, b) = (1/(1 + 0,1i); 1 + 0,1j)$, $i, j = \overline{1, 10}$.² Для тестирования используем значение $n = 8$.

Величины $C(a_1), \mathbf{K}, C(a_n)$ (см. формулу (2.2)) выбираем следующим образом. Рассмотрим четыре отрезка: $[1; 2]$, $[1; 10]$, $[1; 100]$, $[1; 1000]$. На каждом отрезке исследуем: равномерное распределение сложностей элементов; группировку в пары $C(a_1) = C(a_2)$, $C(a_3) = C(a_4), \mathbf{K}, C(a_{n-1}) = C(a_n)$, значения сложностей

¹ При этом найденное оптимальное дерево может не быть 2-деревом, так как в общем случае могут существовать и оптимальные деревья другого вида.

² При описании некоторой реальной задачи параметры функционала определяются с некоторой погрешностью. Следовательно, значения параметров можно привязать к узлам некоторой сетки, что оправдывает тестирование алгоритма без оценки колебаний погрешности между узлами.

пар распределим равномерно на отрезке; группировку в тройки; и так далее до $n - 1$ (если n не делится целиком на нужное число, то оставшиеся значения сложности считаем неполной группой).

Соответствующие максимальной погрешности значения параметров обозначим через $(a_{\max}; b_{\max})$ и $(d_{\max}; g_{\max})$, где $d_{\max}$ обозначает номер диапазона (1 – [1; 2], 2 – [1; 10], 3 – [1; 100], 4 – [1; 1000]), а $g_{\max}$ – число группируемых сложностей (1 для равномерного распределения).

Обозначим стоимость найденного эвристическим алгоритмом дерева через $P_{\text{эвр}}(n)$, стоимость оптимального дерева через $P_{\text{онм}}(n)$, погрешность алгоритма через $x(n) = 100\% \cdot (P_{\text{эвр}}(n) - P_{\text{онм}}(n)) / P_{\text{онм}}(n)$. Среднюю по всем тестируемым вариантам погрешность обозначим через $\bar{x}$, среднееквадратичное отклонение – через dx , максимальную погрешность – через $\max x$, минимальную погрешность – через $\min x$. Результаты тестирования приведены в таблице 3.9.

	$\min x, \%$	$\max x, \%$	$\bar{x}, \%$	$dx, \%$	$(a_{\max}; b_{\max})$	$(d_{\max}; g_{\max})$
Веерная организация	4,368	104787,77	2638,5	8458,599	(0,50; 2,00)	(4; 5)
Последовательная организация	12,546	240,253	78,369	43,175	(0,91; 1,10)	(1; 5)
2-организация	3,418	162,068	54,939	35,559	(0,91; 1,10)	(1; 2)
1-й эвристический	0,000	3,293	0,079	0,305	(0,67; 2,00)	(1; 5)
2-й эвристический	0,000	3,817	0,165	0,474	(0,59; 2,00)	(1; 1)

Таблица 3.9. Относительная погрешность алгоритмов для функционала (II).

Для иллюстрации разброса стоимости различных деревьев в таблице приведена информация об отличии стоимости оптимального на $D(f)$ дерева от стоимости веерной организации и от стоимости деревьев, оптимальных на $O_p(f)$ и $D_2(f)$. Для представления этих результатов в виде погрешности считаем, что первый “алгоритм” в таблице выдает веерную организацию в качестве решения, второй – оптимальную последовательную организацию¹, третий – оптимальную 2-организацию. Видно, что оптимальное на $D_2(f)$ дерево может иметь значительно большую

¹ Для поиска оптимальной последовательной организации одной группы использовался алгоритм, описанный в главе IV.

стоимость, чем оптимальное на $D(f)$ дерево. Тем более это относится к последовательной организации. Веерная организация в большинстве случаев будет неприемлема.

Второй эвристический алгоритм, несмотря на увеличение сложности, дает в худшем случае большую погрешность, чем первый. На рис. 3.8 слева приведен график роста погрешности первого эвристического алгоритма при параметрах худшего случая $(a_{\max}; b_{\max})$, $(d_{\max}; g_{\max})$ для n от 2 до 10. График позволяет предположить, что погрешность при увеличении n нарастает. На рис. 3.8 справа приведен аналогичный график для второго эвристического алгоритма. Исходя из графика, можно предположить, что погрешность при увеличении n не нарастает. В протестированном случае это существенное преимущество второго эвристического алгоритма.

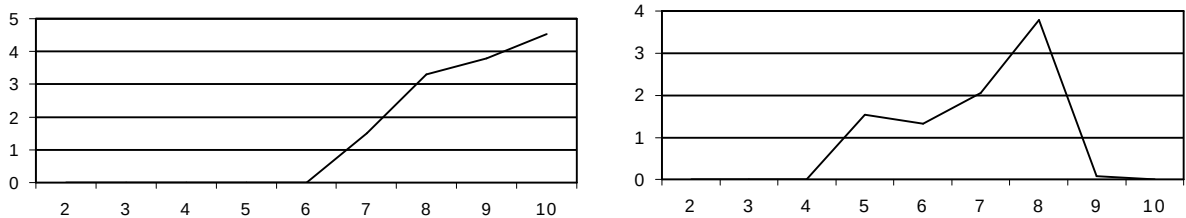


Рис. 3.8. Относительная погрешность эвристических алгоритмов при возрастании n , %.

Кратко подведем итоги данной главы. Рассмотрены методы поиска оптимальных на $D(f)$ и $D_r(f)$ деревьев организации одной группы f , $|f|=n$ для структурного функционала общего вида. В общем случае не существует полиномиальных по n алгоритмов, дающих точное решение на $D(f)$ и $D_r(f)$ (см. следствия к утв. 3.1 и 3.3). Причем погрешность любого полиномиального алгоритма может быть сколь угодно велика. В то же время построены переборные алгоритмы (см. утв. 3.2 и 3.4), сложность которых не намного превышает нижнюю оценку сложности точного алгоритма (при тех n , для которых точные алгоритмы остаются реализуемыми, см. табл. 3.2, 3.4).

Как показывает пункт 2 §1 главы II, существуют функционалы стоимости, для которых задача об оптимальном дереве на $D_r(f)$ решается полиномиальным по n алгоритмом (см. функционал (2.1), функционалы (II) и (IV) при $a=1$, $b=1$). В

связи с этим интересна задача поиска классов функционалов, для которых задача на $D_r(f)$ решается полиномиальным алгоритмом. Как показано в пункте 4 §1, таким классом являются, например, функционалы вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, для которых построен алгоритм решения задачи на $D_r(f)$ со сложностью $\tilde{s}(n, r) < n^r$ (см. утв. 3.9). Построен алгоритм и проанализирована сложность решения задачи на $D(f)$ для функционалов такого вида. Однако вопрос о полиномиальности алгоритма остается открытым (см. п.3 §1).

На рис. 3.2, 3.4, 3.5 приведены примеры результатов работы алгоритмов для функционалов (II)-(IV) в тех областях, в которых они не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми (см. рис. 2.6-2.8 гл. II).

В связи с достаточно высокой сложностью точных алгоритмов представляет интерес построение эвристических алгоритмов меньшей сложности. В общем случае такие алгоритмы могут давать сколь угодно большую погрешность (см. утв. 3.1, 3.3, 3.5, 3.7), однако их можно использовать для конкретного функционала после предварительного тестирования. В §2 построены эвристические алгоритмы решения задачи на $D(f)$. Как отмечено в сноске к названию §2, эвристические алгоритмы решения задачи на $D_r(f)$ строятся почти дословным повторением. Для функционала общего вида построены два эвристических алгоритма. Сложность первого (см. п.3 §2) превышает $s(n, 2)$ не более, чем в три раза (см. утв. 3.14), что гораздо ниже сложности $s(n)$ переборного алгоритма поиска оптимального дерева (см. таблицы 3.2 и 3.3). Сложность второго эвристического алгоритма (см. п.4 §2) превышает $s(n, 2)$ не более чем в $2n$ раз (см. утв. 3.16), что также значительно эффективнее переборного алгоритма. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ построены эвристические алгоритмы со сложностью порядка n^2 (см. п.1 §2) и $n^2 \log n$ (см. п.2 §2).

Доказано, что для определенных классов функционалов (выпуклых и вогнутых) эвристические алгоритмы дают точное решение (см. утв. 3.11, 3.13, 3.15, 3.17). Вне этих классов необходимо тестирование “качества работы” алгоритма. Приведен пример такого тестирования для функционала (II) (см. §2 гл. II) в

той области, в которой он не является ни выпуклым, ни вогнутым. Сделаны эмпирические выводы о величине средней и максимальной погрешности, о нарастании погрешности при росте n (см. таблицы 3.7, 3.8, 3.9, рис. 3.7, 3.8). В результате тестирования можно сделать выводы о том, какой алгоритм предпочтительнее использовать для конкретного функционала. Еще раз подчеркнем, что проведенный эмпирический анализ относится к функционалу (II). Аналогичным образом эвристические алгоритмы могут тестироваться и для других функционалов, но выводы могут отличаться от полученных для (II).

Кроме того, в таблице 3.9 приведен пример эмпирического анализа самого функционала на классе деревьев $D(f)$. Из таблицы можно сделать вывод о том, насколько отличается стоимость деревьев, оптимальных на $D_2(f)$ и $O_p(f)$, от стоимости оптимального на $D(f)$ дерева. Отличие стоимости веерной организации от стоимости оптимального на $D(f)$ дерева иллюстрирует, насколько организация “наиболее простого вида” может быть дороже оптимальной. То есть приведен пример разброса стоимости различных деревьев для конкретного функционала. Аналогичные численные эксперименты могут проводиться и на более сложных классах организаций. Полученные с помощью такого анализа результаты могут помочь в выявлении некоторых закономерностей функционала (например, выпуклости или вогнутости).

Глава IV. Алгоритмы поиска оптимальной последовательной организации.

В данной главе рассматриваются методы решения задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$.

Согласно теореме 1.7 существует оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$ организация, которая не содержит повторяющихся групп. Ниже считаем, что в $O_p(\mathbf{f})$ входят только такие организации. Найденные графы будут оптимальными и на первоначальном множестве $O_p(\mathbf{f})$. Таким образом, для любой вершины $g \in V \setminus N_G$ произвольной организации $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$ выполнено $Q_G(g) = \{h, \{a\}\}$, где $h = g \setminus \{a\}$, $\{a\}$ – некоторая элементарная подгруппа (см. лемму 1.4). В последовательной организации одной группы элементы “присоединяются друг к другу” в некотором порядке (см. опр. 1.33, рис. 1.8).

Рассматриваемые последовательные организации (без повторяющихся групп) не содержат пересечений, следовательно по теореме 1.8 для существенно выпуклых функционалов найденное алгоритмами решение будет оптимальной организацией и на множествах $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$.

В §1 оценивается сложность и строятся алгоритмы решения задачи об оптимальной последовательной организации для функционала общего вида. В конце параграфа приводится пример, поясняющий изложенный материал. В §2 построенные алгоритмы модифицируются для решения задачи с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$, который зависит не от состава подгрупп $g_1, \mathbf{K}, g_k$, организуемых в группу g , а лишь от их мощностей $|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|$. Например, для определенного в §2 главы II анонимного функционала с функцией сложности вида (2.2) требование $P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k), C(g)) = P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ эквивалентно условию равенства сложностей элементов: $C(a_1) = \mathbf{K} = C(a_n)$. Также в §2 оценивается сложность задачи об оптимальной последовательной организации с функционалом вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ (доказывается NP -полнота).

§1. Алгоритм решения общей задачи.

1. Эквивалентность задач о поддереве минимального веса и об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации.

Напомним, что вершинами графов $G \in O_p(\mathbf{f})$ могут быть произвольные группы элементов. Все множество групп обозначается через F (см. опр. 1.13). Выполнено $F = 2^N \setminus \{\emptyset\}$, где $N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\} = f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$, $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ – набор групп, которые обязательно должны присутствовать в каждом графе $G \in O_p(\mathbf{f})$. Определим вспомогательный граф.

Определение 4.1. Графом задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации назовем ориентированный граф $H = (V_H, E_H)$: $V_H = F \cup \{\emptyset\}$, $E_H = E'_H \cup E''_H \cup E'''_H$, где $E'_H = \{(\emptyset, \{a_i\}) : i = \overline{1, n}\}$, $E''_H = \{(\{a_i\}, \{a_i, a_j\}) : 1 \leq i < j \leq n\}$, $E'''_H = \{(g, g \cup \{a_i\}) : g \in V, |g| \geq 2, a_i \notin g, i = \overline{1, n}\}$.

Определение 4.2. Назовем весом ребер графа $H = (V_H, E_H)$ функцию $l : E_H \rightarrow R^+$, которая определяется следующим образом. Для ребер из E'_H положим вес равным нулю. Для любого ребра из $E''_H \cup E'''_H$ вида $e = \{g, g \cup \{a_i\}\}$ положим $l(e) = P(g, \{a_i\})$.

На рис. 4.1 приведена схема графа задачи. Рассмотрим некоторое ребро $e = (g, h) \in E''_H \cup E'''_H$, то есть любое ребро, кроме n нижних ребер. Тогда ребро e ведет из группы g в группу $h = g \cup \{a\}$, где $\{a\}$ – некоторая элементарная группа, не входящая в g . То есть ребро e соответствует организации подгрупп $\{a\}$ и g в группу h . Вес $l(e)$ ребра e равен стоимости $P(\{g\}, \{a\})$ такой организации. Любой путь из вершины $\emptyset$ в некоторую группу g в графе задачи соответствует некоторой последовательной организации одной группы g (определяет последовательность элементов, см. опр. 1.33). Причем суммарный вес ребер пути равен стоимости организации.

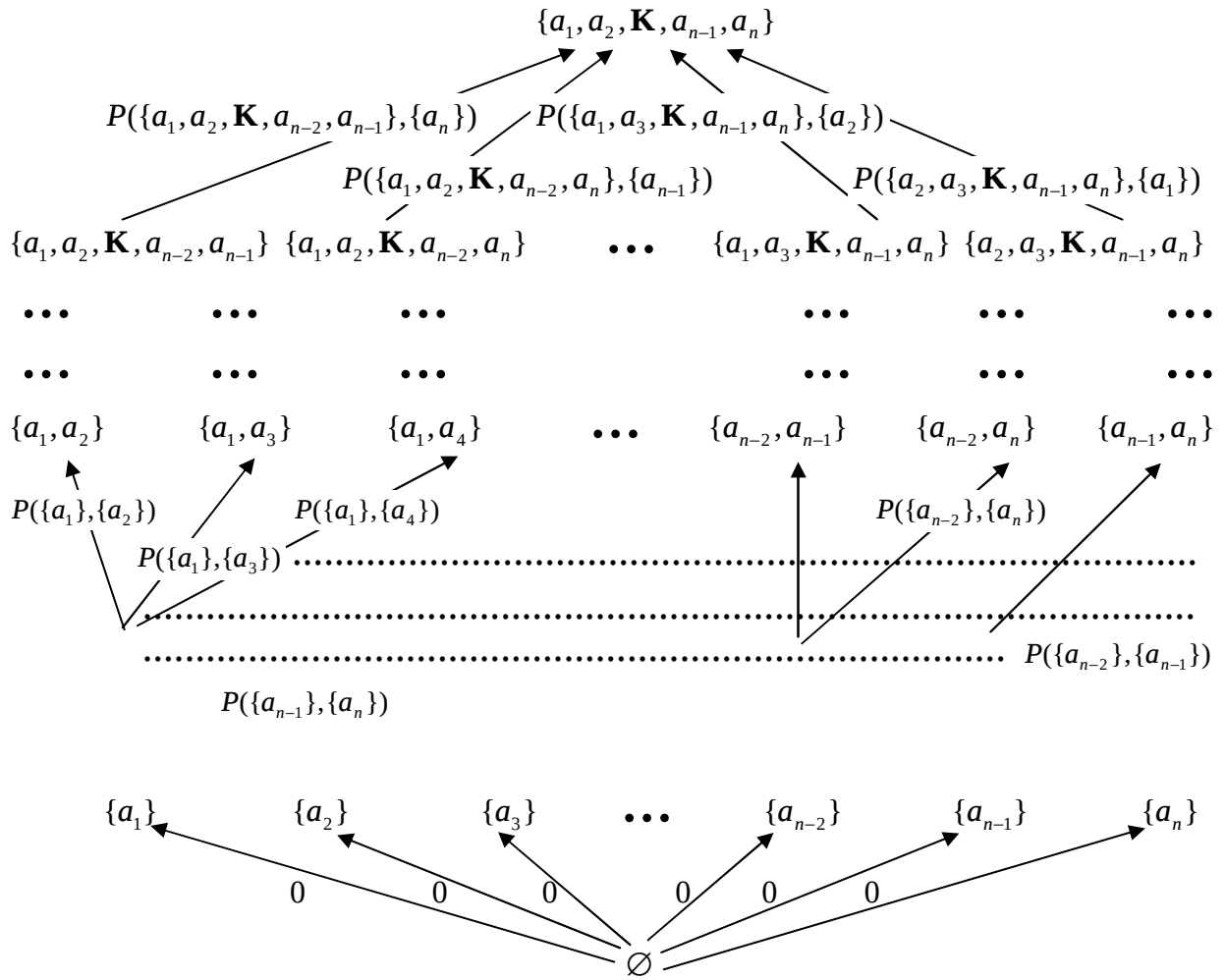


Рис. 4.1. Граф $H = (V_H, E_H)$ задачи об оптимальной последовательной организации.

Рассмотрим поддерево D графа задачи H с корнем в $\emptyset$,¹ содержащее неэлементарные группы из $f_1, \mathbf{K}, f_m$, листья которого содержатся среди неэлементарных групп из $f_1, \mathbf{K}, f_m$.² Далее, если не оговорено противное, под поддеревом понимаем поддерево указанного вида, не оговаривая каждый раз требования к поддереву.

Определение 4.3. Задачу поиска поддерева минимального веса назовем задачей об оптимальном поддереве в H . Под весом $l(D)$ поддерева D будем понимать сумму весов ребер D .

¹ Под поддеревом H с корнем в $\emptyset$ понимается подграф, в каждую вершину которого, кроме корня $\emptyset$, входит ровно одно ребро.

² Считаем, что в наборе $f_1, \mathbf{K}, f_m$ есть хотя бы одна неэлементарная группа, иначе оптимальна вырожденная организация, состоящая из изолированных элементарных групп.

Теорема 4.1. Для структурного функционала общего вида задача об оптимальной последовательной организации эквивалентна¹ задаче об оптимальном поддереве в графе задачи H .

Доказательство. Пусть $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$ – последовательная организация набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Построим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа H .

Определим множество вершин V_D следующим образом $V_D = V'_D \cup V''_D \cup \{\emptyset\}$, где $V'_D = \{g \in V, |g| \geq 2\}$, $V''_D = \{\{a_i\} : \exists j > i, \{a_i, a_j\} \in V\}$. То есть включим в V'_D все группы графа G , мощность которых больше или равна двум. В G каждая группа $\{a_i, a_j\}$ мощности два организуется из подгрупп $\{a_i\}$ и $\{a_j\}$, $i < j$. Тогда для каждой группы $\{a_i, a_j\}$ в V_D включаем только подгруппу $\{a_i\}$ с меньшим номером элемента.

Определим множество ребер E_D следующим образом. Рассмотрим $g \in V$, $|g| \geq 3$, тогда $Q_G(g) = \{h, \{a_i\}\}$, $g, h \in V_D$. Включим ребро $e = (h, g)$ в E_D , при этом имеем $P(Q_G(g)) = l(e)$. Рассмотрим $g = \{a_i, a_j\} \in V$, $i < j$, тогда $g, \{a_i\} \in V_D$. Включим ребро $e = (\{a_i\}, g)$ в E_D . Снова имеем $P(Q_G(g)) = l(e)$. Для $\{a_i\} \in V_D$ включим ребро $e = (\emptyset, \{a_i\})$ в E_D , $l(e) = 0$. По построению в каждую вершину D , кроме корня, входит ровно одно ребро. Все неэлементарные группы из набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ входят в D . Все терминальные вершины G содержатся среди набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Следовательно, все листья D также содержатся среди $f_1, \mathbf{K}, f_m$. В итоге получим поддерево D графа H , причем выполнено $P(G) = l(D)$ (см. опр. 4.3).

Обратно, пусть $D = (V_D, E_D)$ – поддерево H . Построим последовательную организацию $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$ набора групп

¹ Под эквивалентностью задач подразумевается, что решение одной задачи можно преобразовать в решение другой и наоборот, причем сложность процедуры преобразования “несущественна” по сравнению со сложностью решения самих задач. Например, сложность построенных в доказательстве теоремы преобразований линейно зависит от числа вершин графа организации G или поддерева D .

$\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ следующим образом. Определим множество вершин $V = (V_D \cup \{\{a_1\}, \mathbf{K}\{a_n\}\}) \setminus \{\emptyset\}$. В вершину $g \in V$, $|g| \geq 2$ в дереве D входит одно ребро $e = (h, g)$. Добавим к E ребра (h, g) , $(g \setminus h, g)$. Вершина $g \setminus h$ элементарна, то есть входит в V . Выполнено $P(Q_G(g)) = l(e)$. Очевидно, что получим последовательную организацию набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$, причем $P(G) = l(D)$.

Итак, каждому поддереву D графа задачи H соответствует одна и только одна последовательная организация $G \in O_p(\mathbf{f})$, причем стоимость организации равна весу соответствующего дерева. То есть задачи о последовательной организации минимальной стоимости о поддереве минимального веса эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие 1. Задача об оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации одной группы f эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути из $\emptyset$ в f в графе H .

Доказательство. Поддерево H с корнем в $\emptyset$, содержащее f , единственным листом которого является f , есть путь из $\emptyset$ в f в графе H . Следствие доказано.

Следствие 2. Алгоритм, решающий задачу об оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации одной группы f , $|f| = n \geq 3$, для структурного функционала P общего вида должен проанализировать $n(2^{n-1} - (n+1)/2)$ значений P .

Доказательство. Выполнено $f = N$, так как организуется только одна группа. По следствию 1 задача эквивалентна задаче о кратчайшем пути из $\emptyset$ в f в графе H . Вес каждого ребра соответствует значению функционала, причем вес каждого ребра может быть выбран независимо от других, так же как и функционал может быть определен на наборе подгрупп независимо от значений на других наборах. Докажем, что алгоритм должен в общем случае проанализировать веса всех ребер H , кроме ребер вида $(\emptyset, \{a\})$.

Предположим, что существует алгоритм, решающий задачу и не анализирующий веса всех вышеуказанных ребер. Положим их

стоимости равными 1. Любой путь из $\emptyset$ в f в H содержит ровно n ребер, вес любого пути равен $n-1$ (вес первого ребра вида $(\emptyset, \{a\})$ нулевой). Алгоритм найдет некоторый путь, не проанализировав хотя бы одного ребра e . Если e не принадлежит пути, изменим его стоимость на 0, иначе на 2. В измененном графе будет найден тот же путь, что и в первом случае, так как измененное значение не анализировалось. Но он не будет оптимален. Условие $n \geq 3$ необходимо для того, чтобы существовали как минимум два пути из $\emptyset$ в f .

Количество ребер H , за исключением ребер вида $(\emptyset, \{a\})$, можно вычислить следующим образом: $n(n-1)/2 + \sum_{i=2, n} C_n^i (n-i) = n(2^{n-1} - (n+1)/2)$ (последнее равенство получено с учетом соотношения $iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$). То есть алгоритм должен анализировать не менее $n(2^{n-1} - (n+1)/2)$ значений функционала. Алгоритм, который решает задачу, анализируя стоимости всех ребер, кроме ребер вида $(\emptyset, \{a\})$, строится очевидным образом. Имея стоимости кратчайших путей до всех вершин данной мощности и просмотрев все выходящие из них ребра, найдем стоимости кратчайших путей до всех вершин следующей мощности. И так далее. Следствие доказано.

Следствие 2 дает алгоритм решения задачи об оптимальной на $O_p(f)$ последовательной организации одной группы, требующий $n(2^{n-1} - (n+1)/2)$ вычислений функционала стоимости, и показывает, что более эффективного алгоритма не существует.

Для решения задачи об оптимальной последовательной организации произвольного набора групп необходимо найти оптимальное поддерево H (см. теор. 4.1). Следующие два пункта посвящены решению этой задачи.

2. Нормализация графа задачи.

Преобразуем граф задачи H (см. опр. 4.1) в так называемый нормализованный граф задачи, из каждой вершины которого выходит не более двух ребер. После этого докажем эквивалентность задач об оптимальном поддереве в исходном и

нормализованном графах. Алгоритм решения задачи об оптимальном поддереве на нормализованном графе строится в следующем пункте.

Определение 4.4. Нормализованным графом задачи $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$ назовем граф, который получается из графа задачи $H = (V_H, E_H)$ в результате следующей процедуры. Пусть $g \in V_H$, $k = |R(g)| \geq 3$, $R(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, где через $R(g)$ обозначено множество вершин, в которые идут ребра из g в графе H . Удалим ребра (g, g_i) , $i = \overline{1, k}$. Добавим $k_1 = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ вершин, обозначив их $g_1^1, \mathbf{K}, g_{k_1}^1$, и ребра $(g_{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}^1, g_i)$, $i = \overline{1, k}$, вес которых равен весу удаленных ребер (g, g_i) . Если $k_1 \geq 3$, то добавим $k_2 = \lfloor (k_1+1)/2 \rfloor$ вершин, обозначив их $g_1^2, \mathbf{K}, g_{k_2}^2$, и ребра $(g_{\lfloor (i+1)/2 \rfloor}^2, g_i^1)$, $i = \overline{1, k_1}$ нулевого веса. И так далее, на очередном шаге добавим две вершины g_1^q, g_2^q и ребра (g, g_1^q) , (g, g_2^q) нулевого веса. Прделав такие шаги для всех $g \in V_H$, $|R(g)| \geq 3$, придем к графу H_{norm} , из вершин которого выходит не более двух ребер. Для $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$ определим задачу об оптимальном поддереве аналогично определению 4.3.

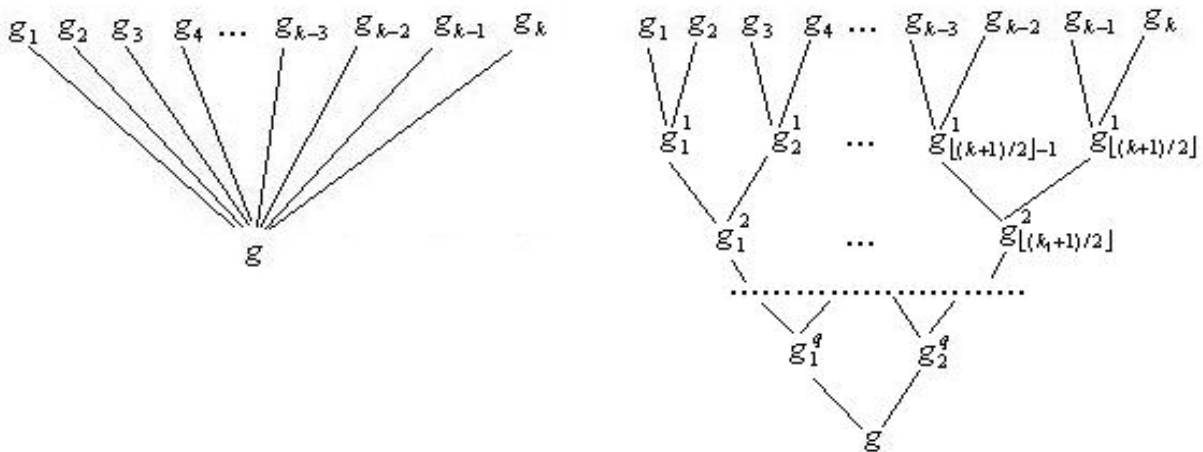


Рис. 4.2. Приведение к нормализованному графу задачи.

Описанное перестроение для $k = 2^{q+1}$ изображено на рис. 4.2. Суть его состоит в следующем. “Вилку” из $k \geq 3$ ребер, выходящих из g , мы заменяем на “вилку” из двух ребер, идущих в дополнительные вершины, из которых в свою очередь выходит не

более двух ребер, и так далее, в итоге “дойдем” до вершин $g_1, \mathbf{K}, g_k$, в которые в первоначальном графе шли ребра из g . То есть каждое ребро (g, g_i) , $i = \overline{1, k}$ заменилось на некоторый путь из g в g_i , проходящий через добавленные вершины. Причем вес пути равен весу первоначального ребра (g, g_i) .

Утверждение 4.1. Задача об оптимальном поддереве в H эквивалентна задаче об оптимальном поддереве в нормализованном графе задачи H_{norm} .

Доказательство. Рассмотрим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа $H = (V_H, E_H)$. Построим поддерево $D' = (V'_D, E'_D)$ графа $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$. Добавим в V'_D все вершины из V_D . Для $g \in V_D$, $|R(g)| \leq 2$ добавим в E'_D выходящие из g ребра. Рассмотрим $g \in V_D$, $R(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \geq 3$. Тогда в H_{norm} есть вершины $g_1^j, \mathbf{K}, g_{k_j}^j$, $j = \overline{1, q}$ (см. опр. 4.4). Пусть в поддереве D из g выходят $l \leq k$ ребер в $g_{i_l}, \mathbf{K}, g_{i_l}$. Добавим в V'_D вершины $g_{[(i_s+1)/2]}^1$, а в E'_D ребра $(g_{[(i_s+1)/2]}^1, g_{i_s})$, $s = \overline{1, l}$. Для добавленных вершин добавим ведущие в них в графе H_{norm} ребра¹ и соответствующие вершины, и так далее, пока не добавим идущие из g ребра. Получим поддерево D' графа H_{norm} , причем по построению $l(D') = l(D)$.

Обратно, рассмотрим поддерево $D' = (V'_D, E'_D)$ графа H_{norm} . Построим поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа H . Добавим в V_D все вершины из $V'_D \cap V_H$. Для $g \in V'_D \cap V_H$, $|R(g)| \leq 2$ добавим в D ребра, выходящие из g в D' . Для $g \in V'_D \cap V_H$, $R(g) = \{g_1, \mathbf{K}, g_k\}$, $k \geq 3$ некоторые $0 \leq l \leq k$ вершин $g_{i_l}, \mathbf{K}, g_{i_l}$ принадлежат V'_D . Тогда добавим в E_D ребра (g, g_{i_s}) , $s = \overline{1, l}$. Получим поддерево D графа H , причем по построению $l(D') = l(D)$.

Итак, каждому поддереву H_{norm} соответствует поддерево H такого же веса и наоборот, что и доказывает утверждение.

¹ В каждую такую вершину ведет ровно одно ребро по построению H_{norm} .

3. Построение алгоритма. Оценка сложности.

Доказательство следующей теоремы представляет собой алгоритм решения задачи об оптимальном поддереве в нормализованном графе $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$. Как и для графа задачи H , через $R(g)$ будем обозначать вершины H_{norm} , в которые идут ребра из $g \in V_{norm}$.

Теорема 4.2. Существует алгоритм, решающий задачу об оптимальном поддереве в $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$ путем сравнения менее $V_2(H_{norm})3^m$ весов различных поддеревьев, где $V_2(H_{norm}) = |\{g \in V_{norm} : |R(g)| = 2\}|$ – число вершин H_{norm} , из которых выходит ровно два ребра.

Доказательство. Искомое поддерево должно содержать все группы набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Обозначим $L = 2^{\mathbf{f}} \setminus \{\emptyset\}$. То есть L – множество непустых поднаборов набора $\{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Поднаборы будем обозначать через $\mathbf{s} \in L$. Рассмотрим $\mathbf{s} \in L$ и $g \in V_{norm}$. Через $l(g, \mathbf{s})$ обозначим минимальный вес поддерева графа H_{norm} с корнем в g , которое содержит все вершины набора $\mathbf{s}$, листья которого содержатся среди вершин $\mathbf{s}$. Если соответствующего дерева не существует, положим $l(g, \mathbf{s}) = +\infty$.

Пусть $|R(g)| = 0$, то есть из g ребер не выходит. Если $g \notin \mathbf{f}$, то $l(g, \mathbf{s}) = +\infty$ для любого $\mathbf{s} \in L$. Если $g \in \mathbf{f}$, то $l(g, \{g\}) = 0$, $l(g, \mathbf{s}) = +\infty$ для любого $\mathbf{s} \neq \{g\}$.

Пусть $|R(g)| = 1$, то есть из g выходит одно ребро $e = (g, h)$. Если $g \notin \mathbf{f}$, то для любого $\mathbf{s} \in L$ имеем $l(g, \mathbf{s}) = l(h, \mathbf{s}) + l(e)$. Соответствующее $l(g, \mathbf{s})$ поддерево строится как объединение ребра e и поддерева веса $l(h, \mathbf{s})$. Если $g \in \mathbf{f}$, то для любого $\mathbf{s} \in L$, $g \notin \mathbf{s}$ имеем $l(g, \mathbf{s}) = l(h, \mathbf{s}) + l(e)$; а для любого $\mathbf{s} \in L$, $g \in \mathbf{s}$, $\mathbf{s} \neq \{g\}$ имеем $l(g, \mathbf{s}) = l(h, \mathbf{s} \setminus \{g\}) + l(e)$, так как g уже содержится в корне дерева. Для оставшегося случая $\mathbf{s} = \{g\}$ имеем $l(g, \{g\}) = 0$.

Пусть $|R(g)| = 2$, то есть из g выходит два ребра $e_1 = (g, h_1)$ и $e_2 = (g, h_2)$. Рассмотрим $\mathbf{s} \in L$. В поддереве, соответствующем величине $l(g, \mathbf{s})$, некоторый набор $\mathbf{s}_1 \subseteq \mathbf{s}$ содержится в поддереве с корнем в h_1 , набор $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s} \setminus \mathbf{s}_1$ (или $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s} \setminus (\mathbf{s}_1 \cup \{g\})$, если $g \in \mathbf{s}$)

содержится в поддереве с корнем в h_2 . Если $s_1 \neq \emptyset$, $s_2 \neq \emptyset$, то $l(g, s) = l(h_1, s_1) + l(e_1) + l(h_2, s_2) + l(e_2)$. Если $s_1 = \emptyset$, $s_2 \neq \emptyset$, то $l(g, s) = l(h_2, s_2) + l(e_2)$. Если $s_1 \neq \emptyset$, $s_2 = \emptyset$, то $l(g, s) = l(h_1, s_1) + l(e_1)$. Если $s_1 = \emptyset$, $s_2 = \emptyset$, то $s = \{g\}$ и $l(g, s) = l(g, \{g\}) = 0$. Сравнив не более $2^{|s|}$ вариантов разбиения s на s_1 и s_2 , найдем минимальное значение $l(g, s)$. Для всех $s \in L$ сравним не более $\sum_{i=1, m} C_m^i 2^i < 3^m$ вариантов.

Для вершин, из которых ребра не выходят, для любого $s \in L$ известны $l(g, s)$ и соответствующие поддеревья. Будем говорить, что для таких вершин задача о поддеревьях решена. В силу ацикличности H_{norm} найдется $g \in V_{norm}$, такая что ребра из g идут в вершины, для которых задача о поддеревьях решена. Тогда решим задачу для g , что потребует менее 3^m сравнений весов поддеревьев. И так далее, в итоге решим задачу для всех вершин $g \in V_{norm}$. Тогда $l(\emptyset, f)$ и соответствующее поддерево являются искомыми, что и доказывает теорему.

Следствие 1.¹ Для структурного функционала общего вида существует алгоритм, решающий задачу об оптимальной последовательной организации путем сравнения менее $(n+1)2^n 3^m$ весов поддеревьев графа $H_{norm} = (V_{norm}, E_{norm})$.

Доказательство. Для любой вершины $g \in V_H$ графа задачи $H = (V_H, E_H)$, $k = |R(g)| \geq 3$ добавим в H_{norm} не более $2k$ вершин (см. опр. 4.4). Из вершины мощности i в H выходит $n-i$ ребер, $i = \overline{2, n-3}$.² Для всех вершин мощности i добавим в H_{norm} не более $2C_n^i(n-i)$ вершин. Из вершины $\{a_j\}$, $j = \overline{1, n-1}$ графа H выходит $n-j$ ребер. Для всех вершин мощности один добавим в H_{norm} не более $\sum_{j=1, n-1} 2(n-j)$ вершин. Для вершины $\emptyset$ добавим в H_{norm} не более $2n$ вершин. Всего добавим вершин не более $\sum_{i=2, n-3} 2C_n^i(n-i) + \sum_{j=1, n-1} 2(n-j) + 2n$. С учетом равенства

¹ Следствие 2 будет доказано ниже в пункте 3 §2.

² Из вершин мощности $n-2$ и $n-1$ выходит не более двух ребер, следовательно для них дополнительные вершины в H_{norm} не добавляются.

$iC_n^i = nC_{n-1}^{i-1}$, оценим последнее выражение величиной $n2^n$. Так как $|V_H| = 2^n$, то $V_2(H_{norm}) \leq |V_{norm}| \leq (n+1)2^n$, что и доказывает следствие.

Доказательство теоремы 4.2 дает алгоритм поиска оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f}$ для структурного функционала общего вида. Пример найденной алгоритмом оптимальной организации приведен на рис. 5.3.

Следствие 1 дает верхнюю оценку сложности в худшем случае. Вершины графов H и H_{norm} , которые не вложены ни в одну из групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$, не могут входить ни в одно поддереву, так как все листья поддерева содержатся среди групп набора $\mathbf{f}$. Таким образом, при поиске оптимального поддерева можно рассматривать не весь граф H_{norm} , а только те его вершины, которые вложены хотя бы в одну из групп набора $\mathbf{f}$. С учетом этой оговорки, оценим сложность в среднем следующим образом.

$m \setminus n$	4	5	6	9	12	15
2	78	153	331	2 737	24 101	235 530
4	425	710	1 104	5 171	31 378	263 338
6	3 000	4 127	6 404	16 510	54 766	304 145
8	21 975	29 949	40 149	76 173	149 033	424 000
10	186 598	255 754	317 294	577 674	837 763	1 576 865
12	-	2 232 954	2 799 913	4 729 690	6 465 469	8 650 013
14	-	19 327 169	24 272 855	39 182 355	55 710 417	71 441 464
16	-	172 996 106	217 376 355	346 835 503	479 629 550	615 392 008
18	-	1 551 740 086	1 942 858 319	3 114 855 925	4 317 150 636	5 466 045 252
20	-	13 952 535 549	17 446 863 109	28 016 474 706	38 502 846 307	48 954 320 373

Таблица 4.1. Оценка сложности алгоритма в среднем.

Сгенерируем случайным образом набор групп. Каждый элемент входит в группу с вероятностью 0,5. Вычислим количество вершин графа H_{norm} , из которых выходит два ребра и которые вложены хотя бы в одну из групп набора $\mathbf{f}$. По теореме 4.2 оценим сложность в среднем по 100 тестам. Результат приведен в таблице 4.1. В строках приведены значения для различных m от 2 до 20. В столбцах – для различных n от 4 до 15. Если $m, n \leq 15$, то сложность остается приемлемой.

Рассмотрим пример, поясняющий материал данного параграфа. Решим задачу об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации набора $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ из двух групп $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$. Имеем $N = f_1 \cup f_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Построим граф задачи H (см. опр. 4.1). При этом ни в одно из поддеревьев H^1 не входят группы, содержащие элементы a_1 и a_4 , так как такие группы не являются подмножествами ни f_1 , ни f_2 . Интересующая нас часть графа H изображена на рис. 4.3.

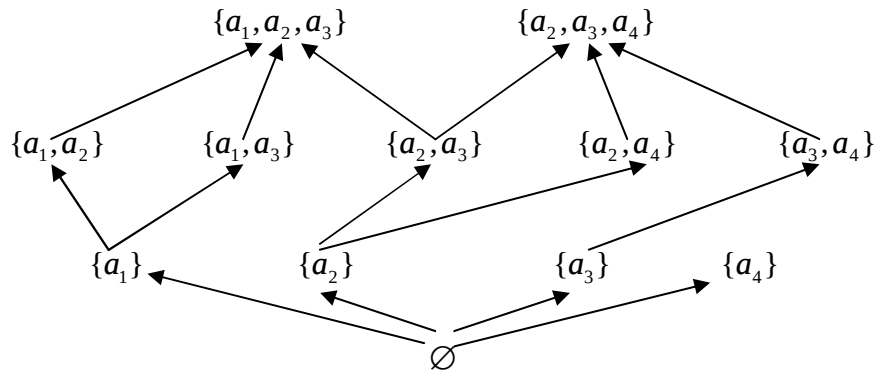


Рис. 4.3. Пример графа задачи H .

Согласно теореме 4.1, имея оптимальное поддерево H с корнем в $\emptyset$ и листьями в f_1 и f_2 , построим соответствующую ему оптимальную последовательную организацию. Предположим, что веса всех ребер, кроме нижних, равны единице (все значения функционала равны единице). Тогда вес поддерева равен числу входящих в него ребер, не считая нижних. Очевидно, что в любое поддерево входят не менее трех таких ребер. В поддерево $D = (V_D, E_D)$ с множеством вершин $V_D = \{\emptyset, \{a_2\}, \{a_2, a_3\}, f_1, f_2\}$ входят ровно три таких ребра, то есть оно оптимально. Вес D равен трем ($l(D) = 3$). Построим соответствующую оптимальную организацию G такой же стоимости². Граф G содержит единственную промежуточную вершину $\{a_2, a_3\}$, которая используется как для организации f_1 , так и для организации f_2 (см. рис. 4.4).

¹ Напомним, что под поддеревом подразумевается поддерево с корнем в $\emptyset$, содержащее неэлементарные группы набора $\mathbf{f}$, листья которого содержатся среди неэлементарных групп набора $\mathbf{f}$.

² Процедура построения последовательной организации по поддереву графа задачи H описана в доказательстве теоремы 4.1.

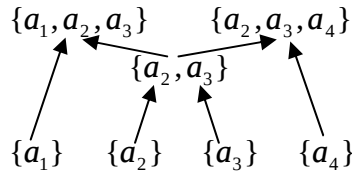


Рис. 4.4. Оптимальная последовательная организация.

В общем случае оптимальное поддереву H строится с помощью нормализации графа. В примере на рис. 4.3 только из вершины $\emptyset$ выходит более двух ребер. Следовательно, при нормализации будут добавлены две вершины g_1^1 и g_2^1 , в которые будут идти ребра из $\emptyset$. Из g_1^1 будут идти два ребра в $\{a_1\}$ и $\{a_2\}$, из g_2^1 – два ребра в $\{a_3\}$ и $\{a_4\}$ (см. опр. 4.4). По утверждению 4.1 поддереву D в H соответствует одно и только одно поддереву D' в H_{norm} такой же стоимости (например, если ребро $(\emptyset, \{a_1\})$ входит в D , то вместо него в D' входит путь $(\emptyset, g_1^1), (g_1^1, \{a_1\})$ и наоборот).

Задачу об оптимальном поддереве в H_{norm} решает алгоритм теоремы 4.2. Поясним его на примере. Имеем $L = 2^f \setminus \{\emptyset\} = \{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_1, f_2\}\}$. Для вершин f_1 и f_2 , из которых не выходит ребер (см. рис. 4.3), задача о поддеревьях решена: $l(f_1, \{f_1\}) = 0$, $l(f_2, \{f_2\}) = 0$, остальные значения равны $+\infty$, так как поддеревом с корнем f_1 можно покрыть только вершину f_1 (то же верно и для f_2). Решим задачу о поддеревьях с корнем в $\{a_2, a_3\}$. Найдем $l(\{a_2, a_3\}, \{f_1, f_2\})$ следующим образом. Из $\{a_2, a_3\}$ выходят два ребра в вершины f_1 и f_2 . Часть набора $\{f_1, f_2\}$ должна покрываться деревом с корнем f_1 , оставшаяся часть – деревом с корнем f_2 . Очевидно, что единственный вариант разбиения $\{f_1, f_2\}$, стоимость которого не равна $+\infty$, использует поддеревья, соответствующие величинам $l(f_1, \{f_1\})$ и $l(f_2, \{f_2\})$. То есть $l(\{a_2, a_3\}, \{f_1, f_2\}) = l(f_1, \{f_1\}) + 1 + l(f_2, \{f_2\}) + 1 = 2$ (стоимости ребер равны единице). Аналогичным образом найдем $l(\{a_2, a_3\}, \{f_1\}) = 1$ и $l(\{a_2, a_3\}, \{f_2\}) = 1$. После этого задача о поддеревьях для $\{a_2, a_3\}$ будет решена. Для остальных вершин H_{norm} задача о поддеревьях решается аналогично.

§2. Оценка сложности задачи при функционале вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Алгоритм решения.

1. NP-полнота задачи.

В случае функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ оценим объем начальных данных задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Во-первых, начальными данными будут сами множества $f_i \subseteq N$, $i = \overline{1, m}$, где $N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ – множество элементов. Во-вторых, значения функционала. Для оценки их количества введем следующее обозначение.

Для $j = \overline{1, n-1}$ через P_j обозначим стоимость организации подгруппы $g \in F^1$ мощности j с элементарной подгруппой $\{a\} \not\subset g$, не входящей в g : $P_j = P(g, \{a\}) = P(|g|, |\{a\}|, |g \cup \{a\}|) = P(j, 1, j+1)$.

Величина P_j зависит только от мощности j группы g , а не от самой группы или от элементарной подгруппы $\{a\}$. То есть обозначение корректно. Для любой организации $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$ выполнено $P(G) = \sum_{h \in V \setminus N_G} P(Q_G(h)) = \sum_{h \in V \setminus N_G} P_{|h|-1}$, так как $Q_G(h) = \{g, \{a\}\}$ для некоторого $\{a\} \not\subset g$.² Таким образом, на стоимость последовательной организации влияют лишь величины $P_1, \mathbf{K}, P_{M-1}$, где $M \leq n$ – максимальная из мощностей групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$: $M = \max(|f_1|, \mathbf{K}, |f_m|)$. Все остальные значения функционала могут быть проигнорированы.

Итак, в случае функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ любая задача об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ однозначно определяется множествами $f_1, \mathbf{K}, f_m$ и величинами $P_1, \mathbf{K}, P_{M-1}$.

¹ Напомним, что $F = 2^N \setminus \{\emptyset\}$ – множество всевозможных групп, то есть непустых подмножеств N .

² Согласно замечаниям, сделанным в начале главы, рассматриваются последовательные организации без повторяющихся групп, следовательно любая неэлементарная группа h организуется из подгрупп g и $\{a\}$, $\{a\} \not\subset g$.

Теорема 4.3. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ задача об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ мощности три ($|f_i| = 3$) NP -полна для любых величин $P_1 > 0, P_2 \geq 0$.

Доказательство. Покажем принадлежность к классу NP . В оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации элементы группы $f_i, i = \overline{1, m}$ организуются в некоторой последовательности (см. опр. 1.33). Сгенерируем эту последовательность недетерминированной машиной Тьюринга для каждой f_i . По известной последовательности элементов построим последовательную организацию $G_i = (V_i, E_i) \in O_p(f_i)$ каждой из групп f_i . Затем построим последовательную организацию G набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ с помощью объединения организаций для каждой из групп: $G = G_1 \cup \mathbf{K} \cup G_m$. При этом если группа g принадлежит как минимум двум графам, то есть $g \in V_i, g \in V_j$ для $i < j$, то считаем, что в G входит один экземпляр g , причем $Q_G(g) = Q_{G_i}(g)$, то есть в группу g в графе G входят такие же ребра, как и в одном из графов $G_1, \mathbf{K}, G_m$. Очевидно, что стоимость любой организации, в которой все группы f_i организуются в найденной последовательности, не менее $P(G)$. То есть получили оптимальную на $O_p(\mathbf{f})$ организацию. Очевидно, что сложность построения оптимальной организации по заданным последовательностям полиномиальна. Следовательно, задача решается недетерминированной машиной Тьюринга за полиномиальное время, то есть принадлежит классу NP .

Рассмотрим задачу о представителях в 2-множествах. Задано множество $X = \{x_1, \mathbf{K}, x_n\}$ и двухэлементные подмножества $Y_1, \mathbf{K}, Y_m \subseteq X$. Необходимо найти множество представителей $Y \subset X$ минимальной мощности, $|Y \cap Y_i| \geq 1$ для $i = \overline{1, m}$.¹ Задача о представителях в 2-множествах NP -полна [19]. Сведем ее к

¹ Фактически задача о представителях в 2-множествах представляет собой другую формулировку задачи о минимальном вершинном покрытии графа, то есть множестве вершин минимальной мощности, “задевающим” все ребра графа. Формулировка задачи о представителях более удобна для доказательства.

поставленной в условии теоремы задаче, чем покажем ее NP -полноту.

Пусть $Y_i = \{x_{j_i}, x_{k_i}\}$, $i = \overline{1, m}$, $1 \leq j_i < k_i \leq n$. Положим $N = \{a_0, a_1, \mathbf{K}, a_n\}$, $f_i = \{a_0, a_{j_i}, a_{k_i}\}$, $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Докажем, что множеству представителей минимальной мощности соответствует оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$ организация и наоборот. Для этого построим процедуры перехода от множества представителей к организации из $O_p(\mathbf{f})$ и обратно.

а) Пусть задано множество представителей $Y = \{x_{l_1}, \mathbf{K}, x_{l_q}\} \subset X$. Построим $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$. Положим $V = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \mathbf{K}, \{a_n\}, f_1, \mathbf{K}, f_m, \{a_0, a_{l_1}\}, \mathbf{K}, \{a_0, a_{l_q}\}\}$. В E включим ребра для организации групп $\{a_0, a_{l_1}\}, \mathbf{K}, \{a_0, a_{l_q}\}$ из элементарных подгрупп. Для $Y_i = \{x_{j_i}, x_{k_i}\}$ выполнено $x_{j_i} \in Y$ или $x_{k_i} \in Y$, следовательно $\{a_0, a_{j_i}\} \in V$ или $\{a_0, a_{k_i}\} \in V$. С помощью одной из этих подгрупп организуем f_i , добавив в E соответствующие ребра. В результате по q -элементному множеству представителей построили последовательную организацию G групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ стоимости $qP_1 + mP_2$.

б) Обратно, пусть задана последовательная организация $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$. Тогда $P(G) = qP_1 + mP_2$, где q – число групп мощности два в G . Рассмотрим $g = \{a_s, a_t\} \in V$, $1 \leq s < t \leq n$. Из g может выходить ребро лишь в $f = \{a_0, a_s, a_t\}$. Удалим g , а f организуем из $\{a_0, a_s\}$ и $\{a_t\}$, добавив, если нужно, вершину $\{a_0, a_s\}$. Продолжая такие действия, найдем последовательную организацию $G' = (V', E') \in O_p(\mathbf{f})$, которая содержит q' групп $\{a_0, a_{l_1}\}, \mathbf{K}, \{a_0, a_{l_{q'}}\}$ мощности два, $P(G') = q'P_1 + mP_2$, $q' \leq q$. Тогда рассмотрим $Y = \{x_{l_1}, \mathbf{K}, x_{l_{q'}}\} \subset X$. Для $f_i = \{a_0, a_{j_i}, a_{k_i}\}$ выполнено $\{a_0, a_{j_i}\} \in V'$ или $\{a_0, a_{k_i}\} \in V'$. То есть существует $1 \leq t \leq q'$, для которого $a_{j_i} = a_{l_t}$ или $a_{k_i} = a_{l_t}$. Следовательно, $x_{j_i} = x_{l_t}$ или $x_{k_i} = x_{l_t}$. Тогда $|Y_i \cap Y| \geq 1$ в силу $Y_i = \{x_{j_i}, x_{k_i}\}$. В результате по последовательной организации G групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ стоимости $qP_1 + mP_2$ построили множество представителей из $q' \leq q$ элементов.

Обозначим решение задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации через G , $P(G) = qP_1 + mP_2$. После этого согласно пункту б) за полиномиальное время найдем множество представителей Y из q' элементов, $q' \leq q$. Если бы существовало множество представителей из $q'' < q$ элементов, то согласно пункту а) существовала бы последовательная организация $G'' \in O_p(\mathbf{f})$, $P(G'') = q''P_1 + mP_2 < P(G)$ в силу $P_1 > 0$, что противоречит оптимальности G . Итак, построили множество представителей Y минимальной мощности $q' = q$. То есть, решив задачу об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации, за полиномиальное время решим задачу о представителях в 2-множествах. Теорема доказана.

Кратко идею доказательства теоремы можно пояснить следующим образом. В любую организацию $G \in O_p(\mathbf{f})$ входят группы $f_1, \mathbf{K}, f_m$ мощности три, то есть в стоимость $P(G)$ входит величина mP_2 . Стоимость различных последовательных организаций из $O_p(\mathbf{f})$ может изменяться за счет числа промежуточных групп мощности два. Построено соответствие, при котором каждая такая группа определяет элемент некоторого множества представителей и наоборот, что и показывает эквивалентность задачи о представителях в 2-множествах и задачи об оптимальной последовательной организации.

Итак, если $P \neq NP$, то не существует полиномиального алгоритма решения задачи на $O_p(\mathbf{f})$, даже если мощности всех групп набора $\mathbf{f}$ не превосходят трех. Следующие пункты посвящены модификации построенного в §1 алгоритма для функционалов вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Такая модификация позволяет снизить сложность, пользуясь особым видом функционала.

2. Узловые группы.

В данном пункте доказываются утверждения, позволяющие для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ анализировать не все организации из $O_p(\mathbf{f})$, а лишь организации, удовлетворяющие условиям утверждений 4.2 и 4.3. Опираясь на этот факт, в пункте 3

модифицируется алгоритм решения задачи на $O_p(\mathbf{f})$ для функционалов вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Определение 4.5. Назовем узловыми группами группы множества $U = \{f_{i_1} \cap \mathbf{K} \cap f_{i_k} : 1 \leq k \leq m, 1 \leq i_1 < \mathbf{K} < i_k \leq m\} \setminus \{\{a_1\}, \mathbf{K}, \{a_n\}, \emptyset\}$.

То есть под узловыми группами будем понимать неэлементарные группы, которые являются пересечением каких-либо групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. В частности, неэлементарные группы набора $\mathbf{f}$ принадлежат U . В примере (см. рис. 4.3) узловыми будут группы $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$ и $\{a_2, a_3\} = f_1 \cap f_2$.

Утверждение 4.2. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ существует оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$ последовательная организация G , в которой любая вершина g с двумя или более выходящими ребрами ($|R_G(g)| \geq 2$) является либо узловой, либо элементарной.

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ – некоторая оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$ организация. Пусть из $g \in V \setminus N_G$, $g \notin U$ выходят по крайней мере два ребра в h_1 и l_1 , причем из g не существует пути ни в одну вершину, обладающую такими же свойствами. Через $h_1 - h_2 - \mathbf{K} - h_{n_1}$ обозначим путь из h_1 в “ближайшую” узловую группу $h_{n_1} \in U$. Через $l_1 - l_2 - \mathbf{K} - l_{n_2}$ обозначим путь из l_1 в “ближайшую” узловую группу $l_{n_2} \in U$. То есть единственными узловыми вершинами обоих путей будут последние вершины. Такие пути существуют, так как все неэлементарные терминальные вершины графа G содержатся в наборе $\mathbf{f}$, то есть являются узловыми.

Из каждой вершины h_i , $i = \overline{1, n_1 - 1}$, l_j , $j = \overline{1, n_2 - 1}$ выходит ровно одно ребро по определению g . Рассмотрим группу $g' = h_{n_1} \cap l_{n_2}$. Имеем $g \subseteq g'$, следовательно g' неэлементарна. Тогда $g' \in U$ и выполнено строгое вложение $g \subset g'$, так как $g \notin U$.

Группы набора $\mathbf{f}$ не содержатся среди $h_1, \mathbf{K}, h_{n_1-1}, l_1, \mathbf{K}, l_{n_2-1}$. Удалим эти вершины и инцидентные им ребра. Пусть $g' \setminus g = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_k}\}$. Добавим в G вершины $g_j = g \cup \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$,

$j = \overline{1, k}$ и ребра (g_{j-1}, g_j) , $(\{a_{i_j}\}, g_j)$, где $g_0 = g$. Аналогично последовательным образом “достроим” g' до h_{n_1} и l_{n_2} . В результате получим последовательную организацию $G' \in O_p(f)$.

Пути $h_1 - h_2 - \mathbf{K} - h_{n_1}$ и $l_1 - l_2 - \mathbf{K} - l_{n_2}$ не имеют общих вершин, так как в противном случае общая вершина организовывалась бы из неэлементарных подгрупп, что противоречит определению последовательной организации. Вместо вершин $h_1, \mathbf{K}, h_k$ и $l_1, \mathbf{K}, l_k$ в G' входят вершины $g_1, \mathbf{K}, g_k$ такой же мощности. То есть $P(G') \leq P(G)$. Мы не добавили в G' ни одной узловой вершины, из которой выходило бы более одного ребра. Из g в G' выходит на одно ребро меньше, чем в G . Прodelываем вышеперечисленные действия до тех пор, пока из g не будет выходить одно ребро. В результате построим оптимальную на $O_p(f)$ организацию, в которой число узловых неэлементарных вершин с более чем одним выходящим ребром на одну меньше, чем в G . Продолжая такие действия, получим искомую оптимальную последовательную организацию. Утверждение доказано.

Утверждение 4.3. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ существует оптимальная на $O_p(f)$ организация G , удовлетворяющая утверждению 4.2 и следующим условиям:

а) если в G найдется путь из узловой вершины g_1 в узловую вершину g_2 , не содержащий других узловых вершин, то в U не существует “промежуточной” узловой группы $g_3 \in U$, $g_1 \subset g_3 \subset g_2$;

б) если в G узловой вершине g_2 не подчинена никакая другая узловая вершина, то в U не существует “вложенной” узловой группы $g_3 \in U$, $g_3 \subset g_2$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальную на $O_p(f)$ организацию $G = (V, E)$, для которой выполняются условия утверждения 4.2, и некоторый путь $h_1 - \mathbf{K} - h_k$ в G , $k \geq 2$, $h_k \in U$, $h_1 \in U$, $h_2, \mathbf{K}, h_{k-1} \notin U$. Каждая следующая вершина пути $h_1 - \mathbf{K} - h_k$ представляет собой предыдущую, к которой добавлен некоторый элемент. Путь назовем неправильным, если в U существует группа $g' \in U$, для которой $h_1 \subset g' \subset h_k$. Также

рассмотрим путь вида $h_1 = \{a_{l_1}\}, h_2 = \{a_{l_1} a_{l_2}\}, \mathbf{K}, h_k = \{a_{l_1} a_{l_2} \mathbf{K} a_{l_k}\}$ из элементарной вершины h_1 в узловую вершину $h_k \in U$, не содержащий других узловых вершин. Такой путь назовем неправильным, если в U существует группа $g' \in U$, для которой $g' \subset h_k$. В этом случае также выполнено $h_1 \subset g' \subset h_k$.

Пусть $h_1 - \mathbf{K} - h_k$ – неправильный путь. Тогда ему соответствует $g' \in U$, $h_1 \subset g' \subset h_k$. По утверждению 4.2 из каждой вершины $h_2, \mathbf{K}, h_{k-1}$ выходит ровно одно ребро в следующую вершину пути. Удалим вершины $h_2, \mathbf{K}, h_{k-1}$ из G . Пусть $g' \setminus h_1 = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_s}\}$. Добавим в G вершины $h'_j = h_1 \cup \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $j = \overline{1, s}$, организовав h'_j из h'_{j-1} и $\{a_{i_j}\}$, где $h'_0 = h_1$. Аналогично последовательным образом “достроим” g' до h_k . Получим новую организацию $G' \in O_p(\mathbf{f})$, причем $P(G') = P(G)$. Если неправилен путь из h_1 в g' , или из g' в h_k , то сделаем описанную процедуру для этих подпутей. И так далее. В итоге получим оптимальную на $O_p(\mathbf{f})$ организацию, в которой любой подпуть пути из h_1 в h_k правилен. Следовательно, число неправильных путей по сравнению с G уменьшилось на единицу. Повторяя вышеописанные действия, получим оптимальную на $O_p(\mathbf{f})$ организацию G^* , в которой все пути правильны.

Рассмотрим в G^* путь из узловой вершины g_1 в узловую вершину g_2 , не содержащий других узловых вершин. Он правилен, следовательно в U не существует “промежуточной” узловой группы $g_3 \in U$, $g_1 \subset g_3 \subset g_2$. То есть выполнено условие а).

Если в G^* узловой вершине g_2 не подчинена никакая другая узловая вершина, то существует путь вида $h_1 = \{a_{l_1}\}, h_2 = \{a_{l_1} a_{l_2}\}, \mathbf{K}, h_k = \{a_{l_1} a_{l_2} \mathbf{K} a_{l_k}\} = g_2$, не содержащий других узловых вершин, кроме $h_k = g_2$. Путь правилен, следовательно в U не существует “вложенной” узловой группы $g_3 \in U$, $g_3 \subset g$. То есть выполнено условие б). Утверждение доказано.

3. Модификация алгоритма для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Оценка сложности.

Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ приведем определение, аналогичное определениям 4.1 и 4.2 для функционала общего вида.

Определение 4.6. Графом задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ назовем ориентированный граф $\tilde{H} = (\tilde{V}_H, \tilde{E}_H)$: $\tilde{V}_H = U \cup \{\emptyset\}$, ребро $e = (g_1, g_2)$ принадлежит $\tilde{E}_H$ тогда и только тогда, когда $g_1, g_2 \in \tilde{V}_H$, $g_1 \subset g_2$ и не существует $g_3 \in \tilde{V}_H$, для которой $g_1 \subset g_3 \subset g_2$. Для любого ребра $e = (g_1, g_2) \in \tilde{E}_H$ положим $l(e) = P_{|g_1|} + P_{|g_1|+1} + \mathbf{K} + P_{|g_2|-1}$, где $P_0 = 0$, $P_1, \mathbf{K}, P_{n-1}$ – величины, введенные в пункте 1.

Таким образом, ребро в $\tilde{H}$ идет из одной узловой группы g_1 в другую узловую группу g_2 при условии, что в U нет “промежуточной” узловой группы g_3 : $g_1 \subset g_3 \subset g_2$. Ребро из $\emptyset$ в g_2 идет в том случае, если в g_2 не вложены другие узловые группы. Стоимость ребра $e = (g_1, g_2)$ равна стоимости последовательной “достройки” g_1 до g_2 . При этом порядок присоединения элементов при такой “достройке” не влияет на стоимость, так как функционал имеет вид $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

В примере (см. рис. 4.3) в $\tilde{H}$ будут входить узловые группы $f_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$, $\{a_2, a_3\} = f_1 \cap f_2$ и вершина $\emptyset$. Граф задачи, который в общем случае изображен на рис. 4.3, значительно упрощается (см. рис. 4.5). В нем остаются только узловые вершины, а последовательность “достройки” одной узловой вершины до другой не играет роли.

Задача об оптимальном поддереве в графе $\tilde{H}$ определяется точно так же, как и задача об оптимальном поддереве в графе H (см. опр. 4.3). То есть под поддеревом $\tilde{H}$ подразумевается поддерево с корнем в $\emptyset$, содержащее неэлементарные группы набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$, листья которого содержатся среди групп набора $\mathbf{f}$. Докажем теорему, аналогичную теореме 4.1.

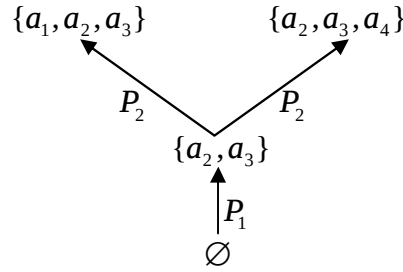


Рис. 4.5. Пример графа задачи $\tilde{H}$ для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Теорема 4.4. Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ задача об оптимальной последовательной организации эквивалентна¹ задаче об оптимальном поддереве в графе задачи $\tilde{H}$.

Доказательство. Пусть $G = (V, E) \in O_p(\mathbf{f})$ – оптимальная на $O_p(\mathbf{f})$ последовательная организация набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$, которая удовлетворяет условиям утверждения 4.3. Сконструируем поддерево $D = (V_D, E_D)$ графа $\tilde{H} = (\tilde{V}_H, \tilde{E}_H)$. Обозначим через V_U множество узловых групп из V : $V_U = V \cap U$. Положим $V_D = V_U \cup \{\emptyset\}$. Построим множество ребер E_D следующим образом.

Рассмотрим $g \in V_U$. Пусть $Q_G(g) = \{g_1, \{a_{i_1}\}\}$. Если $g_1 \notin V_U$ и $|g_1| > 1$, то рассмотрим $Q_G(g_1) = \{g_2, \{a_{i_2}\}\}$ и повторим рассуждения для g_2 . И так далее, в итоге дойдем до $g_k \in V_U$ или до элементарной группы g_k , $|g_k| = 1$. Если g_k элементарна, то вершине g в графе G не подчинена никакая другая узловая вершина. Следовательно, не существует $g' \in U$, $g' \subset g$ (см. условие б утв. 4.3). Если $g_k \in V_U$, то из узловой вершины g_k в узловую вершину g в графе G существует путь, не содержащий других узловых вершин. Следовательно, не существует $g' \in U$, $g_k \subset g' \subset g$ (см. условие а утв. 4.3). В первом случае ребро $(\emptyset, g) \in \tilde{E}_H$, во втором ребро $(g_k, g) \in \tilde{E}_H$. Добавим соответству-

¹ Под эквивалентностью задач подразумевается, что решение одной задачи можно преобразовать в решение другой и наоборот, причем сложность процедуры преобразования “несущественна” по сравнению со сложностью решения самих задач. Например, сложность построенных в доказательстве теоремы преобразований линейно зависит от числа вершин графа организации G или поддерева D .

ющее ребро в E_D . Вес добавленного ребра будет равен суммарной стоимости организации вершин $g_{k-1}, g_{k-2}, \mathbf{K}, g_1, g$.

Покажем, что в результате действительно получим поддереву D графа $\tilde{H}$. В каждую вершину D , кроме $\emptyset$, входит ровно одно ребро. D содержит все неэлементарные группы набора $\mathbf{f}$, так как они являются узловыми. Если некоторая группа $h \in V_U$ не является терминальной в G , то из нее в графе G существует путь в некоторую узловую вершину g , не содержащий других узловых вершин. При построении D будет добавлено ребро (h, g) , то есть h не является листом D . Следовательно, листья D могут содержаться только среди терминальных вершин G , то есть среди групп набора $\mathbf{f}$.

Покажем, что $P(G) = l(D)$. Пусть $h \in V \setminus N_G$. Если h – узловая, то в нее в дереве D входит ребро e , вес которого $l(e)$ включает в себя стоимость $P(Q_G(h))$ организации h . Если h – не узловая, то $h \notin \mathbf{f}$ и по утверждению 4.2 из h выходит ровно одно ребро. Следовательно, существует единственный путь из h в некоторую узловую вершину g , не содержащий других узловых вершин. В дереве D в g входит ребро e , вес которого $l(e)$ включает в себя стоимость $P(Q_G(h))$ организации h . Итак, стоимость организации каждой неэлементарной подгруппы графа G входит в вес ребер D один и только один раз. Имеем $P(G) = l(D)$.

Обратно, пусть $D = (V_D, E_D)$ – поддерево графа $\tilde{H}$. Построим последовательную организацию $G = (V, E)$. Добавим в V вершины $(V_D \cup \{\{a_1\}, \mathbf{K}, \{a_n\}\}) \setminus \{\emptyset\}$. Пусть $g \in V_D \setminus \{\emptyset\}$. В дереве D в нее входит ровно одно ребро $e = (h, g)$. Пусть $g \setminus h = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_k}\}$. Тогда добавим в V вершины $h_j = h \cup \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_j}\}$, $j = \overline{1, k-1}$ (кроме элементарной $\{a_{i_1}\}$ при $h = \emptyset$), организовав h_j из h_{j-1} и $\{a_{i_j}\}$, где $h_0 = h$. Группа g организуется из h_{k-1} и $\{a_{i_k}\}$. Сумма стоимостей организации g и добавленных в V вершин будет равна $l(e)$. В результате построим $G \in O_p(\mathbf{f})$, так как D содержит все группы набора $\mathbf{f}$, причем $P(G) = l(D)$.

Итак, каждому поддереву D графа задачи $\tilde{H}$ соответствует одна и только одна последовательная организация $G \in O_p(\mathbf{f})$,

причем стоимость организации равна весу соответствующего поддерева. То есть задачи о последовательной организации минимальной стоимости и о поддереве минимального веса эквивалентны. Теорема доказана.

Задачу об оптимальном поддереве в $\tilde{H}$ можно решить точно так же, как и задачу об оптимальном поддереве в H , то есть нормализовав $\tilde{H}$ (см. опр. 4.4) и применив теорему 4.2 к полученному нормализованному графу. Этот факт справедлив, так как пункты 2 и 3 §1 не используют никаких свойств графа H , кроме ацикличности, то есть могут быть применены и к графу $\tilde{H}$. Пример найденной алгоритмом оптимальной последовательной организации приведен на рис. 5.3.

Количество вершин графа $\tilde{H}$ независимо от n ограничено величиной 2^m , так как число узловых групп не превышает $2^m - 1$. Это позволяет пересмотреть верхнюю оценку сложности алгоритма (см. следствие 1 из теор. 4.2) для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Следствие 2 (из теоремы 4.2). Для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ существует алгоритм, решающий задачу об оптимальной последовательной организации путем сравнения менее $22^{2m}3^m$ весов поддеревьев нормализованного графа задачи $\tilde{H}_{norm} = (\tilde{V}_{norm}, \tilde{E}_{norm})$.

Доказательство. Граф $\tilde{H} = (\tilde{V}_H, \tilde{E}_H)$ содержит не более 2^m вершин, из каждой выходит не более $2^m - 1$ ребер. Следовательно, konstrуируя граф $\tilde{H}_{norm}$, добавим к $\tilde{V}_{norm}$ не более $2^{m+1} - 2$ вершин для каждой вершины из $\tilde{V}_H$ (см. опр. 4.4). Всего добавим не более $2^{2m+1} - 2^{m+1}$ вершин. Итак, $V_2(\tilde{H}_{norm}) \leq |\tilde{V}_{norm}| < 22^{2m}$ (см. теор. 4.2), что и доказывает следствие.

Итак, для решения задачи об оптимальной последовательной организации необходимо построить граф задачи $\tilde{H}$, нормализовать его, найти оптимальное поддерево нормализованного графа, перейти от него к оптимальному поддереву в $\tilde{H}$ и построить соответствующую этому поддереву оптимальную организацию. При этом только сложность первого и последнего этапов зависят

от числа элементов n . Сложность последнего этапа несущественна (линейно зависит от числа вершин в графе организации), поэтому считаем, что от n зависит лишь сложность построения $\tilde{H}$. При построении $\tilde{H}$ для поиска пересечения групп или для определения вложенности одной группы в другую можно проанализировать соответствующие группам двоичные вектора длины n .¹ Число вершин и ребер $\tilde{H}$ от n не зависит.² То есть сложность процедуры построения $\tilde{H}$ зависит от n линейно. Наибольшую сложность имеет этап поиска оптимального поддеревя в нормализованном графе (алгоритм теор. 4.2). Таким образом, при увеличении n линейно возрастает меньшее слагаемое суммарной сложности, что позволяет решать задачу для больших значений n .

Аналогично пункту 3 §1 можно оценить сложность алгоритма в среднем, генерируя случайным образом набор групп (элемент входит в группу с вероятностью 0,5) и оценивая сложность по нескольким тестам. Как и в общем случае, сложность остается приемлемой, если m не превосходит полутора десятков, независимо от значения n .³

Кратко подведем итоги данной главы. Как показывает пункт 1 §2, даже для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ и мощностей всех групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ не более трех не существует полиномиального по m алгоритма, решающего задачу об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации (если $P \neq NP$, см. теор. 4.3). Алгоритм с линейной оценкой сложности по числу элементов n и экспоненциальной оценкой сложности по числу групп m для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$ построен в пункте 3 §2. Алгоритм основан на поиске поддеревя графа задачи $\tilde{H}$, число вершин которого определяется структурой пересечений групп набора $\mathbf{f}$ (см. опр. 4.5 и 4.6). Таким образом, "при более сложной" структуре пересечений сложность алгоритма возрастает и наоборот. В среднем сложность алгоритма приемлема при $m \leq 15$ независимо от значения n в пределах десятков тысяч.

¹ i -я компонента вектора определяет, входит элемент a_i в группу или нет.

² Эти величины определяются структурой пересечений групп набора $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$.

³ Имеется в виду "разумное" значение в пределах нескольких десятков тысяч.

Для случая структурного функционала общего вида задача значительно усложняется, так как на оптимальность последовательной организации могут влиять порядка $n2^n$ значений функционала вместо n значений для функционала вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$. Следствие 2 к теореме 4.1 показывает, что даже при $m=1$ любой алгоритм должен вычислить порядка $n2^n$ значений P . В то же время вычисления такого количества значений достаточно для построения графа задачи H (см. опр. 4.1), а следовательно и для решения задачи (см. теор. 4.1). Пункты 2 и 3 §1 представляют собой построение алгоритма, порядок сложности которого в худшем случае $n2^n 3^m$ (см. следствие 1 к теор. 4.2). В среднем сложность алгоритма также зависит от “сложности” структуры пересечений групп набора $\mathbf{f}$. Тестирование алгоритма на различных наборах (см. таблицу 4.1) показывает, что при $m, n \leq 15$ сложность остается приемлемой.

Таким образом, в настоящей главе построены алгоритмы и проанализирована сложность задачи об оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ организации произвольного набора групп для структурных функционалов общего вида и для функционалов вида $P(|g_1|, \mathbf{K}, |g_k|, |g|)$.

Данная глава показывает, что задача об оптимальной организации нескольких групп весьма сложна. Если группы набора $\mathbf{f}$ пересекаются сложным образом, то необходимо выбирать промежуточные группы с учетом того, что они могут использоваться для организации нескольких групп набора $\mathbf{f}$. То есть в общем случае при объединении оптимальных организаций для каждой из групп получим неоптимальную организацию набора групп. Для структурного функционала общего вида представляется сомнительным существование эффективных алгоритмов решения задачи об оптимальной организации набора групп на множествах $O(\mathbf{f})$, $O_r(\mathbf{f})$, $\tilde{O}(\mathbf{f})$, $\tilde{O}_r(\mathbf{f})$ даже для малых значений n и m . Поэтому перспективным направлением исследования является поиск классов структурного функционала, для которых задача упрощается. Например, для существенно выпуклых функционалов достаточно решить задачу на $O_p(\mathbf{f})$, чтобы получить решение на всех вышеуказанных множествах (см. теор. 1.8).

Глава V. Модель управления структурными изменениями организационной системы.

Во введении к работе было дано неформальное определение организационной системы и присущей ей иерархической структуры. В данной главе рассматриваются некоторые вопросы моделирования структуры организационной системы.

Сначала остановимся на статических моделях поиска оптимальной структуры среди некоторого множества альтернатив. Если структура описывается ориентированным ациклическим графом, то моделирование сводится к поставленной в главе I задаче об оптимальной иерархии. Таким образом, приведенные ранее примеры частных постановок (см. гл. II) одновременно являются примерами статических моделей, а весь аппарат глав I–IV может использоваться для статического моделирования в случае структурного функционала стоимости. Ключевым моментом при определении статической модели является выбор функционала. Для различных примеров организационных систем (например, для отраслей промышленности) накоплен огромный эмпирический материал, позволяющий определить некоторые агрегированные параметры структуры. Например, норма управляемости (максимальное число подчиненных) [3], численность управленческого персонала [25] и т. п. Такие исследования позволяют сравнивать некоторые “типичные” структуры и выбирать из них наиболее подходящую для конкретной системы. Тестирование функционалов на этих “типичных” вариантах позволяет уточнять их вид и параметры, исходя из эмпирических данных и результатов моделирования. Ниже считаем, что функционал стоимости некоторым образом задан.

При переходе от статических моделей к динамическим будем считать, что функционал соответствует стоимости функционирования системы (затратам) в течение некоторой единицы времени. Если “ситуация” остается неизменной, то достаточно минимизировать затраты (найти структуру, минимизирующую функционал) для получения “наиболее эффективной” системы и модель сводится к статической. Если же “ситуация” изменяется, то старая структура может “не отвечать новым требованиям” и необходима реструктуризация

(перестроение), требующая некоторых затрат. В этом случае в динамике может оказаться оптимальной “более дорогая”, но и “более гибкая” структура, требующая меньших затрат на перестроение.

Выбор структуры, оптимальной в динамике, является ключевой проблемой в некоторых моделях “устойчивого развития” организационных систем (см., например, [11]). Вопрос о выборе критерия оптимальности в динамике для организационных систем не имеет однозначного решения [5, 24]. В отсутствии исчерпывающего прогноза изменений внешней среды постановки оптимизационных задач неизбежно включают в себя элементы эмпирики. Ниже мы рассмотрим один из возможных эмпирических критериев, который при необходимости может быть модифицирован.

Ограничения на траектории структур (графов) могут описываться различным образом. В качестве одного из вариантов аппарата описания траекторий структурных изменений отметим приведенное в [1, 2] построение так называемых “уравнений графодинамики”. Ниже в §2 мы рассмотрим единственное ограничение на преобразования структуры – в каждый момент времени она должна быть графом организации некоторого набора групп (см. опр. 1.22), определяемого “внешней средой”.

Динамическая оптимизация напрямую связана и с проблемой выбора оптимального числа уровней иерархии в зависимости от внешних условий, которая обсуждается в большинстве работ (см., например, [44, 56]) лишь на качественном уровне. Излагаемая модель позволяет дать количественные оценки оптимального числа иерархических уровней (см. §3).

§1. Стоимость реорганизации структуры.

В данном параграфе строится один из возможных примеров содержательно интерпретируемой метрики на графах организации – стоимость реорганизации. За основу взята некоторая метрика на множестве групп (см. опр. 5.1). Далее построены метрики на множестве наборов групп и на множестве графов (см. опр. 5.2 и 5.3), причем аналогичное построение можно также провести на основе любой другой метрики на множестве групп. Таким

образом, проиллюстрирован возможный подход к построению метрики общего вида. В последующих параграфах стоимость реорганизации используется для моделирования структурных изменений организационной системы.

1. Стоимость реорганизации групп.

Определение 5.1. Стоимостью реорганизации группы $g \in F \cup \{\emptyset\}$ ¹ в группу $h \in F \cup \{\emptyset\}$ назовем величину $r(g, h) = \sum_{a \in g \setminus h} r'(a) + \sum_{a \in h \setminus g} r''(a)$,² где $r'(a) \geq 0$ – заданная стоимость исключения элемента a из группы, а $r''(a) \geq 0$ – заданная стоимость включения элемента a в группу. Величину $r(\emptyset, h)$ назовем стоимостью организации h “с нуля”, величину $r(g, \emptyset)$ – стоимостью деорганизации g .

Таким образом, предполагаем, что для любого элемента $a \in N$ заданы стоимости включения и исключения a из группы. Для организационной системы затраты на включение (исключение) могут соответствовать “налаживанию взаимодействия” элемента в новой группе, некоторому “обучению” и т. п. Предполагаем, что стоимость включения (исключения) зависит лишь от самого элемента a , а не от той группы, в которую он включается (из которой исключается).

Определению 5.1 можно дать следующую содержательную интерпретацию. Для реорганизации группы g в группу h сначала последовательно исключаем те элементы g , которые не входят в h , а затем последовательно включаем те элементы h , которые не входят в g . Сумма $r(g, h)$ всех затрат и будет стоимостью реорганизации g в h . Если положить $g = \emptyset$, то получим стоимость организации группы h “с нуля”, то есть стоимость включения всех элементов группы. Если положить $h = \emptyset$, то получим стоимость деорганизации группы g , то есть стоимость исключения всех элементов группы.

¹ Напомним, что через F обозначено множество групп (см. опр. 1.13), через $F \cup \{\emptyset\}$ соответственно обозначено множество F с добавленной пустой “группой”. Под множеством групп ниже будем понимать множество с включенной пустой группой.

² Сумму по пустому множеству полагаем равной нулю по определению.

Лемма 5.1. Если для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) > 0$ и $r''(a) > 0$, то для любых групп $g, h \in F \cup \{\emptyset\}$ выполнена первая аксиома метрики: равенство $r(g, h) = 0$ эквивалентно равенству $g = h$.

Доказательство. $r(g, h) = \sum_{a \in g \setminus h} r'(a) + \sum_{a \in h \setminus g} r''(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $g \setminus h = \emptyset$ и $h \setminus g = \emptyset$ (в силу $r'(a) > 0$, $r''(a) > 0$), что эквивалентно условию $g = h$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. Если для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) = r''(a) = r(a)$, то для любых групп $g, h \in F \cup \{\emptyset\}$ выполнена вторая аксиома метрики (симметричность): $r(g, h) = r(h, g)$.

Доказательство. $r(g, h) = \sum_{a \in g \setminus h} r(a) + \sum_{a \in h \setminus g} r(a) = \sum_{a \in h \setminus g} r(a) + \sum_{a \in g \setminus h} r(a) = r(h, g)$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. Для любых групп $f, g, h \in F \cup \{\emptyset\}$ выполнено неравенство треугольника: $r(f, h) \leq r(f, g) + r(g, h)$.

Доказательство. Имеем (*) $r(f, h) = \sum_{a \in f \setminus h} r'(a) + \sum_{a \in h \setminus f} r''(a)$, (**) $r(f, g) + r(g, h) = \sum_{a \in f \setminus g} r'(a) + \sum_{a \in g \setminus f} r''(a) + \sum_{a \in g \setminus h} r'(a) + \sum_{a \in h \setminus g} r''(a)$. Рассмотрим $a \in f \setminus h$. Имеем $a \in f$, $a \notin h$. Слагаемое $r'(a)$ входит в выражение (*). Если $a \in g$, то $a \in g \setminus h$. Если $a \notin g$, то $a \in f \setminus g$. В обоих случаях слагаемое $r'(a)$ также входит в выражение (**). Рассмотрим $a \in h \setminus f$. Имеем $a \notin f$, $a \in h$. Слагаемое $r''(a)$ входит в выражение (*). Если $a \in g$, то $a \in g \setminus f$. Если $a \notin g$, то $a \in h \setminus g$. В обоих случаях слагаемое $r''(a)$ также входит в выражение (**). Итак, каждое слагаемое, входящее в левую часть неравенства $r(f, h) \leq r(f, g) + r(g, h)$, входит и в правую его часть. Лемма доказана.

Утверждение 5.1. Если для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) = r''(a) = r(a) > 0$, то стоимость реорганизации является метрикой на множестве групп $F \cup \{\emptyset\}$.

Доказательство следует из лемм 5.1-5.3. Утверждение доказано.

2. Стоимость реорганизации наборов групп.

В данном пункте на основании метрики на множестве групп, построенной в пункте 1, строится метрика на множестве наборов групп.

Определение 5.2. Стоимостью реорганизации произвольного набора групп Q_1 ¹ в набор групп Q_2 будем называть величину $r(Q_1, Q_2) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(g_i, h_i)$, где $k = \max(|Q_1|, |Q_2|)$, набор меньшей мощности дополнен пустыми группами до мощности k , минимум берется по всевозможным разбиениям наборов Q_1 и Q_2 на пары (g_i, h_i) , $i = \overline{1, k}$. Если Q_1 – пустой набор, то величину $r(\emptyset, Q_2)$ назовем стоимостью организации набора Q_2 “с нуля”. Если Q_2 – пустой набор, то величину $r(Q_1, \emptyset)$ назовем стоимостью деорганизации набора Q_1 .

Задача о поиске разбиения на пары минимальной суммарной стоимости является задачей о назначениях. Таким образом, стоимость реорганизации эффективно вычисляется. Методы решения задачи о назначениях приведены, например, в работе [7].

Поясним определение. Предположим, что необходимо реорганизовать некоторый набор (множество) групп Q_1 в набор Q_2 . Рассмотрим две группы: $g \in Q_1$ и $h \in Q_2$. Затраты на деорганизацию g и последующую организацию h “с нуля” составят $r(g, \emptyset) + r(\emptyset, h)$. Затраты на непосредственную реорганизацию g в h составят $r(g, h)$. Второй способ предпочтительнее в силу неравенства $r(g, h) \leq r(g, \emptyset) + r(\emptyset, h)$ (см. лемму 5.3). Поэтому для реорганизации Q_1 в Q_2 разбиваем эти наборы на пары $(g, h) \in Q_1 \times Q_2$ и реорганизуем g в h . Если $|Q_1| < |Q_2|$, то оставшиеся после разбиения на пары группы набора Q_2 организуем “с нуля”. А если $|Q_1| > |Q_2|$, то оставшиеся группы

¹ Набор групп Q – некоторое множество групп, в частности пустое. $|Q|$ – количество групп в наборе (мощность). В наборе могут быть одинаковые (повторяющиеся) группы.

набора Q_1 деорганизуем. Таким образом, набор с меньшей мощностью дополняем пустыми множествами до достижения мощности другого набора. Разбивая полученные наборы на пары и суммируя стоимость реорганизации первой группы пары во вторую, получим стоимость реорганизации набора Q_1 в набор Q_2 . Разбиение на пары производим таким образом, чтобы стоимость реорганизации была минимальна. Если Q_1 – пустой набор, то получим стоимость организации набора Q_2 “с нуля” (или сумму стоимостей организации всех групп набора “с нуля”), если Q_2 – пустой набор, то получим стоимость деорганизации набора Q_1 (или сумму стоимостей деорганизации всех групп набора).

Лемма 5.4. Добавление к любому из наборов групп Q_1, Q_2 произвольного числа пустых множеств не меняет значения $r(Q_1, Q_2)$.

Доказательство. Обозначим $k_1 = |Q_1|$, $k_2 = |Q_2|$, $k = \max(k_1, k_2)$. При вычислении $r(Q_1, Q_2)$ к Q_1 добавляется $k - k_1$ пустых множеств, к Q_2 добавляется $k - k_2$ пустых множеств. Обозначим полученные после добавления наборы через Q'_1 и Q'_2 . Далее выбираются пары $(g_i, h_i) \in Q'_1 \times Q'_2$, $i = \overline{1, k}$ так, чтобы $\sum_{i=\overline{1, k}} r(g_i, h_i)$ была минимальна.

Добавим к одному из наборов Q_1, Q_2 пустые множества. Обозначим мощность полученного набора через k'' . Если $k'' \leq k$, то при вычислении $r(Q_1, Q_2)$ снова получим наборы Q'_1 и Q'_2 , то есть не изменим $r(Q_1, Q_2)$.

Если $k'' > k$, то при вычислении $r(Q_1, Q_2)$ получим наборы Q''_1 и Q''_2 , где Q''_j получается из Q'_j добавлением $k'' - k$ пустых множеств, $j = 1, 2$. Наборы Q''_1 и Q''_2 можно разбить на пары следующим образом: сохраним разбиение наборов Q'_1 и Q'_2 , оставшиеся пары состоят из пустых множеств. Учитывая $r(\emptyset, \emptyset) = 0$, получим, что $r(Q''_1, Q''_2) \leq r(Q'_1, Q'_2) = r(Q_1, Q_2)$. Рассмотрим разбиение наборов Q''_1 и Q''_2 на пары $(g_i, h_i) \in Q''_1 \times Q''_2$, $i = \overline{1, k''}$, при котором $r(Q''_1, Q''_2) = \sum_{i=\overline{1, k''}} r(g_i, h_i)$. Если в нем есть две пары вида $(g, \emptyset)$, $(\emptyset, h)$, $g \neq \emptyset$, $h \neq \emptyset$, то перестроим их

в пары (g, h) , $(\emptyset, \emptyset)$. При таком разбиении снова получим $r(Q_1'', Q_2'')$, так как сумма не увеличилась в силу $r(g, h) \leq r(g, \emptyset) + r(\emptyset, h)$ (см. лемму 5.3), $r(\emptyset, \emptyset) = 0$. Повторяя такие действия, получим в результате разбиение, в котором нет двух пар вида $(g, \emptyset)$, $(\emptyset, h)$. Такое разбиение может быть получено из некоторого разбиения наборов Q_1' и Q_2' добавлением пар, состоящих из пустых множеств. Таким образом, $r(Q_1, Q_2) = r(Q_1', Q_2') \leq r(Q_1'', Q_2'')$. То есть $r(Q_1, Q_2) = r(Q_1'', Q_2'')$. Лемма доказана.

Лемма 5.5. Если для любых групп f и g выполнена первая аксиома метрики, то и для любых наборов непустых групп Q_1 и Q_2 также выполнена первая аксиома метрики: равенство $r(Q_1, Q_2) = 0$ эквивалентно равенству $Q_1 = Q_2$.

Доказательство. $r(Q_1, Q_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $|Q_1| = |Q_2| = k$, так как иначе добавляются пустые множества, а $r(g, \emptyset) > 0$ и $r(\emptyset, h) > 0$ для любых непустых групп g и h . Далее имеем $r(Q_1, Q_2) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(g_i, h_i) = 0$ тогда и только тогда, когда наборы Q_1 и Q_2 разбиваются на пары (g_i, h_i) , для которых $r(g_i, h_i) = 0$, то есть на пары одинаковых множеств, что возможно лишь при $Q_1 = Q_2$. Лемма доказана.

Лемма 5.6. Если для любых групп выполнена вторая аксиома метрики, то и для любых наборов групп Q_1 и Q_2 также выполнена вторая аксиома метрики (симметричность): $r(Q_1, Q_2) = r(Q_2, Q_1)$.

Доказательство. Добавим пустые множества так, чтобы наборы Q_1 и Q_2 содержали одинаковое количество k множеств. Тогда имеем $r(Q_1, Q_2) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(g_i, h_i) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(h_i, g_i) = r(Q_2, Q_1)$. Лемма доказана.

Лемма 5.7. Для произвольных наборов групп Q_1 , Q_2 , Q_3 выполнено неравенство треугольника: $r(Q_1, Q_3) \leq r(Q_1, Q_2) + r(Q_2, Q_3)$.

Доказательство. Обозначим $k = \max(|Q_1|, |Q_2|, |Q_3|)$. Добавим к Q_1 , Q_2 , Q_3 пустые множества так, чтобы $k = |Q_1| = |Q_2| = |Q_3|$. По лемме 5.4 это не изменит величин $r(Q_1, Q_3)$, $r(Q_1, Q_2)$, $r(Q_2, Q_3)$.

Предположим, что (f_i, g_i) , $i = \overline{1, k}$ – разбиение множеств Q_1 и Q_2 на пары, которое соответствует значению $r(Q_1, Q_2)$, а (g_i, h_i) , $i = \overline{1, k}$ – разбиение множеств Q_2 и Q_3 на пары, которое соответствует значению $r(Q_2, Q_3)$, тогда имеем: $r(Q_1, Q_2) + r(Q_2, Q_3) = \sum_{i=\overline{1, k}} [r(f_i, g_i) + r(g_i, h_i)] \geq \sum_{i=\overline{1, k}} r(f_i, h_i) \geq r(Q_1, Q_3)$, где последнее неравенство выполнено в силу того, что $r(Q_1, Q_3)$ соответствует разбиению наборов групп Q_1 и Q_3 на пары с минимальной суммарной стоимостью реорганизации. Лемма доказана.

Утверждение 5.2. Если для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) = r''(a) = r(a) > 0$, то стоимость реорганизации является метрикой наборах непустых групп.

Доказательство. По утверждению 5.1 стоимость реорганизации любых групп удовлетворяет первой и второй аксиомам метрики и неравенству треугольника. По леммам 5.5-5.7 этого достаточно для того, чтобы те же свойства выполнялись для любых наборов непустых групп. Утверждение доказано.

3. Стоимость реорганизации графов.

Определение 5.3. Для произвольных ориентированных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, вершины которых являются группами ($V_1, V_2 \subseteq F \cup \{\emptyset\}$), стоимостью реорганизации G_1 в G_2 назовем величину $r(G_1, G_2) = \min \sum_{i=\overline{1, k}} r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i))$,¹ где $k = \max(|V_1|, |V_2|)$, множество вершин меньшей мощности дополнено изолированными вершинами до мощности k , минимум берется по всевозможным разбиениям множеств V_1 и V_2 на пары (g_i, h_i) , $i = \overline{1, k}$. Если $G_1 = (\emptyset, \emptyset)$ – пустой граф, то величину $r(\emptyset, G_2)$ назовем стоимостью организации графа G_2 “с нуля”. Если $G_2 = (\emptyset, \emptyset)$ – пустой граф, то величину $r(G_1, \emptyset)$ назовем стоимостью деорганизации графа G_1 .

¹ Через $Q_{G_1}(g)$ обозначено множество (набор) вершин, которые непосредственно подчинены g , то есть из которых идут ребра в g в графе G_1 . Аналогично $Q_{G_2}(h)$ – вершины, непосредственно подчиненные h в G_2 .

Задача о поиске разбиения на пары минимальной суммарной стоимости является задачей о назначениях (см., например, [7]). Таким образом, стоимость реорганизации эффективно вычисляется.

Поясним определение. Пусть $G_1 = (V_1, E_1) \in O(N)$ и $G_2 = (V_2, E_2) \in O(N)$ – графы организации над некоторым множеством элементов N (см. опр. 1.19). Предположим, что G_1 необходимо реорганизовать в G_2 . Рассмотрим вершины $g \in V_1 \setminus N_{G_1}$ и $h \in V_2 \setminus N_{G_2}$. Они организуются из наборов подгрупп $Q_{G_1}(g)$ и $Q_{G_2}(h)$ соответственно. Необходимо некоторым образом “перестроить” звено $Z_{G_1}(g)$ в звено $Z_{G_2}(h)$.¹ Для подгрупп $h_1 \in Q_{G_1}(g)$ и $h_2 \in Q_{G_2}(h)$ сделаем следующее: освободим (деорганизуем) элементы из $h_1 \setminus h_2$ от участия в группе g , а затем привлечем (организуем) элементы из $h_2 \setminus h_1$ к участию в группе h . Аналогично поступаем и с другими парами групп из $Q_{G_1}(g) \times Q_{G_2}(h)$. Минимальная стоимость таких перестроений составит $r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h))$ (см. опр. 5.2). Стоимость освобождения всех элементов от участия в g и привлечения к участию в h составит $r(Q_{G_1}(g), \emptyset) + r(\emptyset, Q_{G_2}(h))$, что не меньше $r(Q_{G_1}(g), Q_{G_2}(h))$ в силу неравенства треугольника (см. лемму 5.7).

Таким образом, для реорганизации G_1 в G_2 разобьем множества V_1 и V_2 на пары $(g, h) \in V_1 \times V_2$ и реорганизуем $Q_{G_1}(g)$ в $Q_{G_2}(h)$. Если $|V_1| < |V_2|$, то оставшиеся после разбиения на пары группы V_2 организуем “с нуля” из соответствующих подгрупп. А если $|V_1| > |V_2|$, то для оставшихся групп V_1 “разрушим” их организацию из подгрупп. Таким образом, одно из множеств V_1 или V_2 дополняем изолированными вершинами до достижения мощности другого. Разбивая полученные множества вершин на пары и суммируя стоимость реорганизации соответствующих наборов подгрупп, получим стоимость реорганизации графа G_1 в

¹ Звено состоит из вершины-центра, непосредственно подчиненных ей вершин и ребер, соответствующих этим подчинениям (см. опр. 1.5).

граф G_2 . Разбиение на пары производим таким образом, чтобы стоимость реорганизации была минимальна.

На графах организации можно определить стоимость реорганизации как сумму по всем парам неначальных вершин. При этом, как показано в [31], стоимость реорганизации будет совпадать со стоимостью определения 5.3. Таким образом, понятие стоимости реорганизации может быть расширено на произвольные ориентированные графы.

Лемма 5.8. При добавлении к любому из графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ любого числа изолированных вершин стоимость реорганизации $r(G_1, G_2)$ не изменится.

Доказательство. Обозначим $k_1 = |V_1|$, $k_2 = |V_2|$, $k = \max(k_1, k_2)$. При вычислении $r(G_1, G_2)$ к V_1 добавляется $k - k_1$ изолированных вершин, к V_2 добавляется $k - k_2$ изолированных вершин. Обозначим полученные множества вершин через V'_1 и V'_2 . Далее выбираются пары $(g_i, h_i) \in V'_1 \times V'_2$, $i = \overline{1, k}$ так, чтобы $\sum_{i=\overline{1, k}} r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i))$ была минимальна. Добавим к одному из множеств V_1 или V_2 изолированные вершины. Обозначим мощность полученного множества вершин через k'' , а соответствующие графы через G_3 и G_4 . Если $k'' \leq k$, то при вычислении $r(G_3, G_4)$ снова получим множества вершин V'_1 и V'_2 , то есть $r(G_3, G_4) = r(G_1, G_2)$.

Если $k'' > k$, то при вычислении $r(G_3, G_4)$ получим множества вершин V''_1 и V''_2 , где V''_j образуется из V'_j добавлением $k'' - k$ изолированных вершин, $j = 1, 2$. Множества V''_1 и V''_2 можно разбить на пары следующим образом: сохраним разбиение для V'_1 , V'_2 , оставшиеся пары (g, h) состоят из изолированных вершин, следовательно $r(Q_{G_3}(g), Q_{G_4}(h)) = r(\emptyset, \emptyset) = 0$. Таким образом, $r(G_3, G_4) \leq r(G_1, G_2)$. Рассмотрим разбиение множеств V''_1 и V''_2 на пары $(g_i, h_i) \in V''_1 \times V''_2$, $i = \overline{1, k''}$, при котором $r(G_3, G_4) = \sum_{i=\overline{1, k''}} r(Q_{G_3}(g_i), Q_{G_4}(h_i))$. Если в нем имеются две пары вида $(Q(g), \emptyset)$ и $(\emptyset, Q(h))$, где $Q(g) \neq \emptyset$ и $Q(h) \neq \emptyset$, то переформируем их в пары $(Q(g), Q(h))$ и $(\emptyset, \emptyset)$. При таком разбиении снова получим $r(G_3, G_4)$, так как сумма не увеличилась в силу неравен-

ства треугольника (см. лемму 5.7) $r(Q(g), Q(h)) \leq r(Q(g), \emptyset) + r(\emptyset, Q(h))$ и равенства $r(\emptyset, \emptyset) = 0$. Повторяя такие действия, получим в результате разбиение, в котором нет двух пар вида $(Q(g), \emptyset)$ и $(\emptyset, Q(h))$. Такое разбиение может быть получено из некоторого разбиения множеств V'_1 и V'_2 добавлением пар (g, h) , состоящих из изолированных вершин, для которых $r(Q(g), Q(h)) = r(\emptyset, \emptyset) = 0$. Таким образом, $r(G_1, G_2) \leq r(G_3, G_4)$. То есть $r(G_1, G_2) = r(G_3, G_4)$. Лемма доказана.

Лемма 5.9. Если для любых наборов непустых групп выполнена первая аксиома метрики, то и для любых графов организации $G_1 = (V_1, E_1) \in O(N)$ и $G_2 = (V_2, E_2) \in O(N)$ без изолированных вершин также выполнена первая аксиома метрики: равенство $r(G_1, G_2) = 0$ эквивалентно равенству $G_1 = G_2$ ($V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$).

Доказательство. Очевидно, что из $G_1 = G_2$ следует $r(G_1, G_2) = 0$, докажем обратное. Пусть $r(G_1, G_2) = 0$. При вычислении $r(G_1, G_2)$, добавив изолированные вершины, получим множества вершин V'_1 и V'_2 такие, что $|V'_1| = |V'_2| = k$. Тогда $r(G_1, G_2) = \sum_{i=\overline{1, k}} r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i))$, где (g_i, h_i) , $i = \overline{1, k}$ – некоторое разбиение на пары множеств V'_1 и V'_2 . Из $r(G_1, G_2) = 0$ следует $r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i)) = 0$. Так как G_1 и G_2 – графы организации, то V_1 и V_2 содержат только непустые группы. Следовательно, $Q_{G_1}(g_i)$ и $Q_{G_2}(h_i)$ являются наборами непустых групп, поэтому $Q_{G_1}(g_i) = Q_{G_2}(h_i)$. Для каждой неначальной вершины $g \in V \setminus N_G$ любого графа организации G выполнено $g = \bigcup_{h \in Q_G(g)} h$. В силу $Q_{G_1}(g_i) = Q_{G_2}(h_i)$ неначальные вершины из V_1 и V_2 разбиваются на пары $g_i = h_i$, причем в g_i входят в графе G_1 ребра из тех же вершин, что и в h_i в графе G_2 . Начальные вершины G_1 не могут соответствовать неначальным вершинам G_2 в силу $Q_{G_1}(g_i) = Q_{G_2}(h_i)$. Следовательно, множества неначальных вершин из G_1 и из G_2 совпадают. Из любой начальной вершины $\{a\} \in V_1$ в графе G_1 выходит хотя бы одно ребро (она не изолирована) в неначальную вершину $g \in V_1 \setminus N_{G_1}$. Следовательно,

$g \in V_2$ и в G_2 также имеется ребро $(\{a\}, g)$. То есть $\{a\} \in V_2$. Обратное также верно. Имеем $V_1 = V_2$. Условие $(g, h) \in E_1$ эквивалентно условию $(g, h) \in E_2$ в силу того, что ребра G_1 , входящие в h , совпадают с ребрами G_2 , входящими в h . Таким образом, $E_1 = E_2$, из чего следует $G_1 = G_2$. Лемма доказана.

Лемма 5.10. Если для любых наборов групп выполнена вторая аксиома метрики, то и для любых графов G_1 и G_2 также выполнена вторая аксиома метрики (симметричность): $r(G_1, G_2) = r(G_2, G_1)$.

Доказательство. Добавим изолированные вершины так, чтобы графы G_1 и G_2 содержали одинаковое количество k вершин. Тогда имеем $r(G_1, G_2) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(Q_{G_1}(g_i), Q_{G_2}(h_i)) = \min \sum_{i=1, \overline{k}} r(Q_{G_2}(h_i), Q_{G_1}(g_i)) = r(G_2, G_1)$. Лемма доказана.

Лемма 5.11. Для произвольных графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ выполнено неравенство треугольника: $r(G_1, G_3) \leq r(G_1, G_2) + r(G_2, G_3)$.

Доказательство. Обозначим $k = \max(|V_1|, |V_2|, |V_3|)$. Добавим к V_1, V_2, V_3 изолированные вершины так, чтобы $k = |V_1| = |V_2| = |V_3|$. По лемме 5.8 это не изменит величин $r(G_1, G_3)$, $r(G_1, G_2)$, $r(G_2, G_3)$. Пусть (f_i, g_i) , $i = 1, \overline{k}$ – разбиение множеств V_1 и V_2 на пары, которое соответствует значению $r(G_1, G_2)$, а (g_i, h_i) , $i = 1, \overline{k}$ – разбиение множеств V_2 и V_3 на пары, которое соответствует значению $r(G_2, G_3)$. Тогда $r(G_1, G_2) + r(G_2, G_3) = \sum_{i=1, \overline{k}} [r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_2}(g_i)) + r(Q_{G_2}(g_i), Q_{G_3}(h_i))] \geq \sum_{i=1, \overline{k}} r(Q_{G_1}(f_i), Q_{G_3}(h_i))$. Последняя сумма больше или равна $r(G_1, G_3)$ в силу того, что $r(G_1, G_3)$ соответствует разбиению на пары с минимальной суммарной стоимостью реорганизации. Лемма доказана.

Утверждение 5.3. Если для всех $a \in N$ выполнено $r'(a) = r''(a) = r(a) > 0$, то стоимость реорганизации является метрикой на множестве графов организации без изолированных вершин.

Доказательство. По утверждению 5.2 стоимость реорганизации наборов непустых групп удовлетворяет первой и второй аксиомам метрики и неравенству треугольника. По леммам 5.9-5.11 этого достаточно для того, чтобы те же свойства выполнялись для любых графов организации без изолированных вершин. Утверждение доказано.

4. Некоторые свойства стоимости реорганизации.

Лемма 5.12. Для любых наборов групп Q' и Q'' выполнено $r(g', g'') \leq r(Q', Q'')$, где $g' = \bigcup_{h \in Q'} h$ и $g'' = \bigcup_{h \in Q''} h$ – группы, образующиеся в результате объединения групп каждого из наборов. Если наборы Q' и Q'' содержат только неповторяющиеся элементарные группы, то вышеуказанное неравенство выполнено как равенство.

Доказательство.
$$r(g', g'') = \sum_{a \in g' \setminus g''} r'(a) + \sum_{a \in g'' \setminus g'} r''(a).$$

Пусть $a \in g' \setminus g''$. Тогда существует группа $h' \in Q'$, для которой $a \in h'$, и не существует группы $h'' \in Q''$, для которой $a \in h''$. При вычислении $r(Q', Q'')$ множество h' входит в некоторую пару (h', h) , где $h \in Q''$ или $h = \emptyset$. В обоих случаях $a \notin h$. Таким образом, слагаемое $r'(a)$ входит в $r(h', h)$, которое, в свою очередь, входит в $r(Q', Q'')$. Аналогично, если $a \in g'' \setminus g'$, то слагаемое $r''(a)$ входит в $r(Q', Q'')$. То есть $r(g', g'') \leq r(Q', Q'')$.

Пусть $Q' = \{\{a\} : a \in g'\}$ и $Q'' = \{\{a\} : a \in g''\}$. Рассмотрим следующее разбиение наборов Q' и Q'' на пары. Для каждого $a \in g' \cap g''$ включим в разбиение пару $(\{a\}, \{a\})$. Остальные пары имеют один из трех видов: $(\{a'\}, \{a''\})$, $(\{a'\}, \emptyset)$, $(\emptyset, \{a''\})$, где $a' \in g'$, $a'' \in g''$. Рассмотрим $a \in g' \setminus g''$. Группа $\{a\}$ войдет ровно в одну из пар указанного вида, следовательно величина $r'(a)$ войдет в $r(Q', Q'')$ ровно один раз. Аналогично, для $a \in g'' \setminus g'$ величина $r''(a)$ войдет в $r(Q', Q'')$ ровно один раз. Итак, при указанном разбиении наборов Q' и Q'' на пары выполнено $r(g', g'') = r(Q', Q'')$. В силу доказанного выше неравенства величина $r(Q', Q'')$ не может быть меньше $r(g', g'')$. Следовательно, построенное разбиение является оптимальным. Лемма доказана.

Итак, для любых разбиений групп g' и g'' на подгруппы стоимость $r(Q', Q'')$ реорганизации набора подгрупп Q' в набор Q'' не меньше, чем стоимость $r(g', g'')$ реорганизации группы g' в группу g'' . Причем равенство имеет место, если разбиение веерное, то есть каждая группа разбивается на входящие в нее элементарные подгруппы.

Утверждение 5.4. Для любой организации $G = (V, E) \in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ выполнено $r(\emptyset, G_{\text{веер}}) \leq r(\emptyset, G)$ и $r(G_{\text{веер}}, \emptyset) \leq r(G, \emptyset)$, где $G_{\text{веер}}$ – веерная организация набора групп $\mathbf{f}$ (см. опр. 1.26).

Доказательство. $r(\emptyset, G) = \sum_{g \in V} r(\emptyset, Q_G(g)) \geq \sum_{i=1, \overline{m}} r(\emptyset, Q_G(f_i))$. Неравенство выполнено, так как группы $f_1, \mathbf{K}, f_m$ входят в G (см. опр. 1.22). По лемме 5.12 $\sum_{i=1, \overline{m}} r(\emptyset, Q_G(f_i)) \geq \sum_{i=1, \overline{m}} r(\emptyset, f_i)$. Множество вершин графа $G_{\text{веер}}$ состоит из $f_1, \mathbf{K}, f_m$ и неповторяющихся элементарных вершин. В элементарную вершину $\{a\}$ ребер не входит. Поэтому $r(\emptyset, Q_{G_{\text{веер}}}(\{a\})) = r(\emptyset, \emptyset) = 0$ и для величины $r(\emptyset, G_{\text{веер}})$ имеем $r(\emptyset, G_{\text{веер}}) = \sum_{i=1, \overline{m}} r(\emptyset, Q_{G_{\text{веер}}}(f_i)) = \sum_{i=1, \overline{m}} r(\emptyset, f_i)$, где последнее равенство выполнено в силу леммы 5.12, так как набор $Q_{G_{\text{веер}}}(f_i)$ содержит только неповторяющиеся элементарные группы, входящие в f_i . Неравенство $r(G_{\text{веер}}, \emptyset) \leq r(G, \emptyset)$ доказывается аналогично с точностью до изменения порядка аргументов. Утверждение доказано.

Таким образом, среди всех организаций $G \in O(\mathbf{f})$ заданного набора групп $\mathbf{f}$ стоимость деорганизации и организации “с нуля” минимальна для веерной организации. Интуитивно ясно, что веерная организация “самая простая” и “дешевле всего” организуется и разрушается. Утверждение 5.4 показывает, что введенная стоимость реорганизации согласуется с этим интуитивным представлением.

§2. Динамика структуры организационной системы.

1. Определение структуры.

Не конкретизируя понятие организационной системы (см. введение к главе), будем рассматривать ее на протяжении T единиц времени.

Определение 5.4. Множество конечных исполнителей (множество элементов) организационной системы обозначим через $N = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ и будем считать неизменным на протяжении рассматриваемого интервала времени.

Определение 5.5. Через $\mathbf{f}^t = \{f_1^t, \mathbf{K}, f_{m^t}^t\}$, $t = \overline{1, T}$ обозначим набор групп исполнителей, которые должны быть организованы на протяжении единицы времени t для выполнения организационной системой своих функций.

Определение 5.6. Структурой организационной системы на протяжении единицы времени t назовем любой граф организации $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$.

Содержательно определения 5.5 и 5.6 можно пояснить следующим образом. Функция системы (выпуск изделия, оказание услуги и т. п.) может быть реализована с помощью совместной работы некоторой группы конечных исполнителей. Считаем, что внешняя среда (например, конъюнктура рынка) определяет, что в течение единицы времени t система должна выполнить некоторое количество m^t функций, причем их выполнение требует организации набора групп $\mathbf{f}^t = \{f_1^t, \mathbf{K}, f_{m^t}^t\}$. Граф $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ организации групп набора $\mathbf{f}^t$ определяет структуру управления исполнителями для координации их взаимодействия в нужных группах. Набор организуемых групп (выполняемых функций) может изменяться при изменении t , что влечет необходимость изменения структуры организационной системы G^t .

2. Пример содержательной интерпретации понятия “внешняя среда”.

В данном пункте приводятся неформальные рассуждения, которые дают содержательные интерпретации “внешней среды”, никак не влияя на дальнейшее изложение. Пункт поясняет разграничение тех параметров системы, которые мы относим к управляемым, и тех, которые заданы “извне”.

Как правило, выполнение тех или иных функций с течением времени становится более или менее выгодным, что и влечет изменение набора организуемых групп f^t . Кроме того, одну и ту же функцию, вообще говоря, могут реализовать различные группы в силу взаимозаменяемости исполнителей. Таким образом, решение о прекращении реализации одних функций и начале реализации других, а также о том, какая группа исполнителей будет реализовывать новую функцию, принимает некоторый “управляющий орган”, который зачастую находится внутри организационной системы (руководит ей). Однако предмет исследования данной работы – структура. Поэтому решение “управляющего органа” мы относим к “внешним условиям”, считая что выбор структуры осуществляется по некоторым образом заданному набору групп. То есть задача оптимизации структуры решается отдельно от остальных задач управления организационной системой. Такой подход позволяет исследовать структурные явления “сами по себе” и возможно будет в какой-то мере способствовать построению общей модели оптимального управления организационной системой.

Приведем пример принятия “управляющим органом” решения о выполнении функций и создании соответствующих групп. Предположим, что система получает доход, выпуская некоторые изделия из заданного набора $I_1, \mathbf{K}, I_q$, определяющего отрасль. В течение единицы времени t считаем неизменным вектор цен на реализуемые изделия $p^t = (p_1^t, \mathbf{K}, p_q^t)$. Набор операций (элементарных работ), необходимых для выпуска всех изделий, обозначим через $e_1, \mathbf{K}, e_r$. Считаем заданной матрицу технологических коэффициентов $W = \{w_{k,j}\}$, где $w_{k,j} \geq 0$ – количество единиц элементарной работы e_j , необходимое для

выпуска единицы изделия I_k , $k = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, r}$. Обозначим через $s_j(a)$ количество элементарной работы e_j , которое исполнитель $a \in N$ способен выполнить за единицу времени. Вектор производительности исполнителя a обозначим через $s(a) = (s_1(a), \mathbf{K}, s_r(a))$.

Предположим, что “управляющий орган” принимает решение о выпуске изделий в объемах, определяемых вектором $y^t = (y_1^t, \mathbf{K}, y_q^t)$. Тогда он должен определить, какую работу выполняет каждый исполнитель, причем суммарный объем выполненных работ должен быть достаточным для выпуска всех изделий. Для этого определяется доля $0 \leq x_j^t(a) \leq 1$ единицы времени t , которую исполнитель a уделяет выполнению элементарной работы e_j , $\sum_{j=\overline{1, r}} x_j^t(a) \leq 1$. Вектор плана работ исполнителя обозначим через $x^t(a) = (x_1^t(a), \mathbf{K}, x_r^t(a))$. Должны выполняться неравенства $\sum_{k=\overline{1, q}} y_k^t w_{k,j} \leq \sum_{a \in N} s_j(a) x_j^t(a)$, $j = \overline{1, r}$ для выполнения работ в требуемых объемах.

“Управляющий орган” может поставить перед собой задачу максимизации полученной за единицу времени t выручки, то есть максимизировать величину $y_1 p_1 + \mathbf{K} + y_q p_q$ при вышеуказанных ограничениях. Тогда планы выпуска $y^t = (y_1^t, \mathbf{K}, y_q^t)$ и планы работ $x^t(a) = (x_1^t(a), \mathbf{K}, x_r^t(a))$ каждого исполнителя $a \in N$ определяются в результате решения задачи линейного программирования. Обеспечив максимально возможную выручку, “управляющий орган” распределяет выполненный объем работ по изделиям, определяя тем самым группы исполнителей $f_1^t, \mathbf{K}, f_{m^t}^t$, участвующие в выпуске каждого из изделий.

Возможно построение и более сложных моделей работы “управляющего органа”, в которых он может также некоторым образом изменять набор конечных исполнителей N (выбирать “кадровую политику”), учитывая не только выручку, но и затраты на содержание исполнителей, и максимизируя валовую прибыль. Возможно подобные модели (см. [15]) при достаточно детальном исследовании смогут описать структурные изменения совместно с другими аспектами управления организационной системой. В

данной работе моделируется только изменение набора организуемых групп $\mathbf{f}^t = \{f_1^t, \mathbf{K}, f_m^t\}$. Приведенный пример работы “управляющего органа” показывает, что изменение $\mathbf{f}^t$ может интерпретироваться как результат изменения вектора цен $p^t = (p_1^t, \mathbf{K}, p_q^t)$ (снижения цен на одни изделия и повышения цен на другие), в результате которого “управляющий орган” принимает решение о прекращении выпуска одних изделий и начале выпуска других.

3. Управление структурой.

Определение 5.7. Множество всевозможных наборов групп из F обозначим через $\mathbf{F}$. Информацией о внешней среде, известной к началу единицы времени t , считаем наборы групп $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}, \mathbf{f}^t$. Динамикой внешней среды назовем наборы $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}, \mathbf{f}^T$.

Таким образом, к началу единицы времени t известно, какой набор групп $\mathbf{f}^t$ нужно организовать, и какие наборы групп нужно было организовать на протяжении предыдущих единиц времени. То есть известна “история” изменения внешней среды.

Определение 5.8. Управлением структурой организационной системы в момент времени t назовем отображение $\Psi^t : \mathbf{F}_1 \times \mathbf{K} \times \mathbf{F} \times O(\mathbf{f}^{t-1}) \rightarrow O(\mathbf{f}^t)$, первые t аргументов которого представляют собой информацию о внешней среде, а последний – структуру системы на протяжении единицы времени $t-1$, $t = \overline{2, T}$. Управлением в первый момент времени назовем отображение $\Psi^1 : \mathbf{F} \rightarrow O(\mathbf{f}^1)$. Совокупность управлений Ψ^t на изучаемом отрезке времени обозначим через $\Psi = (\Psi^1, \mathbf{K}, \Psi^T)$ и назовем управлением структурой.

Определение 5.9. Управление структурой назовем простейшим, если для любого $t = \overline{1, T}$ выполнено $\Psi^t : \mathbf{F} \rightarrow O(\mathbf{f}^t)$.

Управление структурой в момент времени t определяет $G^t \in O(\mathbf{f}^t)$ – граф организации заданного внешней средой набора

групп $\mathbf{f}^t$, то есть структуру организационной системы на протяжении единицы времени t , исходя из известной информации о внешней среде и “текущей” структуры системы, то есть структуры на протяжении единицы времени $t-1$. Структура в первый момент времени выбирается из множества $O(\mathbf{f}^1)$ без учета какой-либо информации, так как к этому моменту известен лишь набор групп $\mathbf{f}^1$. Простейшее управление структурой выбирает G^t из множества $O(\mathbf{f}^t)$ без учета информации о состоянии внешней среды в предыдущие единицы времени и без учета “текущей” структуры системы.

Определение 5.10. Результатом управления структурой назовем следующую величину¹ $R(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, \overline{T}} [P(G^t) + r(G^{t-1}, G^t)]$, где $G^t = \Psi^t(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}, \mathbf{f}^t, G^{t-1})$ для $t = \overline{2, n}$, $G^0 = G^1 = \Psi^1(\mathbf{f}^1)$. Первую и вторую часть результата обозначим соответственно через $P(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, \overline{T}} P(G^t)$ и $r(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, \overline{T}} r(G^{t-1}, G^t)$. Если ясно, о какой динамике внешней среды идет речь, то первые аргументы будем опускать, используя запись $R(\Psi)$, $P(\Psi)$, $r(\Psi)$.

Результат управления структурой при каждом t складывается из затрат на функционирование системы, определяемых функционалом P (см. введение к главе), и из затрат на реструктуризацию $r(G^{t-1}, G^t)$ (см. §1), то есть из стоимости создания (построения) структуры G^t из сложившейся к началу единицы времени t структуры G^{t-1} . Считаем, что в первый момент времени структура G^1 “уже имеется” и не требует затрат на построение ($G^0 = G^1$). Общий результат управления структурой

¹ В определении суммарные затраты делятся на T , то есть вычисляются удельные затраты на единицу времени. При фиксированном T это никак не влияет на оптимальность управления. Во введении и заключении затраты названы суммарными для краткости.

зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T$ и от управления Ψ , определяющего структуры $G^1, \mathbf{K}, G^T$.

Определение 5.11. Оптимальным управлением назовем управление структурой Ψ , минимизирующее результат, то есть $\arg \min_{\Psi} R(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi)$.

Таким образом, оптимальное управление минимизирует средние затраты на функционирование системы и на реструктуризацию на протяжении конечного числа единиц времени T . Оптимальное управление зависит от динамики внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T$, которая, как правило, заранее неизвестна. Если имеется некоторый прогноз – вероятностное распределение динамики внешней среды, то можно определить управление, оптимальное в среднем.

Определение 5.12. Оптимальным в среднем управлением назовем управление структурой Ψ , минимизирующее средний результат, то есть $\arg \min_{\Psi} \bar{R}(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi)$, где математическое ожидание берется по динамике внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T$ с известным распределением.

Задача об оптимальном управлении представляется весьма сложной для аналитического решения. Однако, если отображения $\Psi^1, \mathbf{K}, \Psi^T$ эффективно вычисляются, то результат управления структурой при заданной динамике внешней среды $\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T$ также может быть эффективно вычислен. Таким образом, если рассматривается набор эффективно вычисляемых управлений, то среди них можно найти оптимальное. Оптимальное в среднем управление можно вычислить путем замены математического ожидания выборочным средним.

4. l -усечения как пример простейших управлений структурой.

Определение 5.13. Для произвольного графа организации $G = (V, E) \in O(N)$ уровнем $L_G(g)$ вершины $g \in V$ назовем максимальную длину пути из g в терминальную вершину.

Уровень любой вершины конечен в силу ацикличности графа организации (см. опр. 1.19). Уровень терминальных вершин нулевой, уровень остальных вершин равен максимальной длине цепочки “начальников” данной вершины, то есть максимальной длине пути в терминальную вершину.

Определение 5.14. Уровнем $L(G)^1$ графа организации $G = (V, E) \in O(N)$ назовем максимальный уровень вершины графа: $L(G) = \max_{g \in V} L_G(g)$.

Далее в этой главе будем рассматривать множество $O(\mathbf{f})$ организаций различных наборов групп $\mathbf{f}$ с заданным структурным функционалом стоимости. Если в набор $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_{m-1}, \{a\}\}$ входит элементарная группа $\{a\}$, то в случае $a \in f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_{m-1}$ удаление $\{a\}$ из набора $\mathbf{f}$ не изменит графов $O(\mathbf{f})$, а в случае $a \notin f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_{m-1}$ после добавления к графам $O(\{f_1, \mathbf{K}, f_{m-1}\})$ изолированной вершины $\{a\}$ получим графы из $O(\mathbf{f})$, причем стоимость не изменится в силу структурности функционала. В силу леммы 5.8 добавление изолированных вершин не изменяет также стоимость реорганизации. Таким образом, не ограничивая общности, ниже будем считать, что набор $\mathbf{f}$ содержит только неэлементарные группы.

Утверждение 5.5. Для произвольной организации $G = (V, E) \in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ выполнено $L(G) = 1$ тогда и только тогда, когда G – веерная организация.

¹ Здесь и далее одной и той же буквой L обозначается как уровень вершины графа, так и уровень самого графа, что не вызывает путаницы в силу различия аргументов L .

Доказательство. Пусть G – веерная организация. Тогда V состоит из групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ и неповторяющихся элементарных групп вида $\{a\}$, где $a \in f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$, причем ребра в $f_1, \mathbf{K}, f_m$ могут идти только из элементарных групп (см. опр. 1.26). Все элементарные группы являются начальными. Все терминальные вершины G входят в набор $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$. Если бы существовал путь длины два и более из начальной вершины $\{a\}$ в терминальную вершину f_i , то нашлась бы промежуточная вершина g , $|g| > 1$, с помощью которой организуется f_i , что противоречит определению веерной организации. Таким образом, $L(G) = 1$.

Пусть $L(G) = 1$. Если неэлементарная вершина $g \in V$ не принадлежит набору $\mathbf{f}$, то g не является терминальной и из нее выходит по крайней мере одно ребро. В силу неэлементарности g в нее также входит ребро. То есть в G существует путь длины 2, что противоречит равенству $L(G) = 1$. Итак, V состоит из групп $f_1, \mathbf{K}, f_m$ и элементарных групп вида $\{a\}$, где $a \in f_1 \cup \mathbf{K} \cup f_m$ (элементарных групп другого вида быть не может, так как в этом случае найдется терминальная вершина, не входящая в $\mathbf{f}$). Если элементарная группа $\{a\}$ повторяется, то хотя бы один из экземпляров $\{a\}$ неначальный, в него входит ребро из другого экземпляра $\{a\}$. Кроме того, $\{a\} \notin \mathbf{f}$ ($\mathbf{f}$ содержит лишь неэлементарные группы), следовательно $\{a\}$ нетерминальная и из нее выходит хотя бы одной ребро. То есть в G существует путь длины 2, что противоречит равенству $L(G) = 1$. Итак, элементарные группы не повторяются. Группа f_i , $i = \overline{1, m}$ организуется из элементарных подгрупп, так как иначе в G нашелся бы путь длины 2. То есть G – веерная организация. Утверждение доказано.

Таким образом, веерная организация и только она имеет минимальный уровень среди всех организаций множества $O(\mathbf{f})$.

Определение 5.15. Для произвольного графа организации $G = (V, E) \in O(\mathbf{f})$ набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_m\}$ назовем l -усечением графа G , $l \geq 1$ граф $G_l \in O(\mathbf{f})$, который получается в результате следующей процедуры. Удаляем из G неначальные вершины с уровнем, большим или равным l , вместе с инцидентными им

ребрами. Получим граф $G'=(V',E')$, где $V'=(V\setminus\{g:L_G(g)\geq l\})\cup N_G$. Если неначальная вершина $g\in V'$ не покрывается в G' подгруппами из $Q_{G'}(g)$, то добавляем к E' ребра $(\{a\},g)$ для всех $a\in g\setminus\bigcup_{h\in Q_{G'}(g)}h$. Если для некоторого $1\leq i\leq m$ $f_i\notin V'$, то добавим к V' группу f_i , а к E' ребра $(\{a\},f_i)$ для $a\in f_i$. В результате получим граф $G_l\in O(\mathbf{f})$ организации набора групп $\mathbf{f}$.

Если $l>L(G)$, то никаких перестроений не происходит. При $l\leq L(G)$ в графе G_l останутся начальные вершины и вершины с уровнем $l-1$ и менее. Следовательно, уровень некоторых начальных вершин будет равен l , то есть выполнено $L(G_l)=l$. Таким образом, G_l получается из G с сохранением l старших уровней иерархии (с номерами от 0 до $l-1$) и удалением остальных неначальных вершин.

На рис. 5.1 приведен пример графа G организации двух групп f_1, f_2 и его 2-усечение G_2 . Выполнено $L_G(f_2)=2$, следовательно при построении G_2 вершина f_2 будет удалена, а затем организована из входящих в нее элементарных групп.

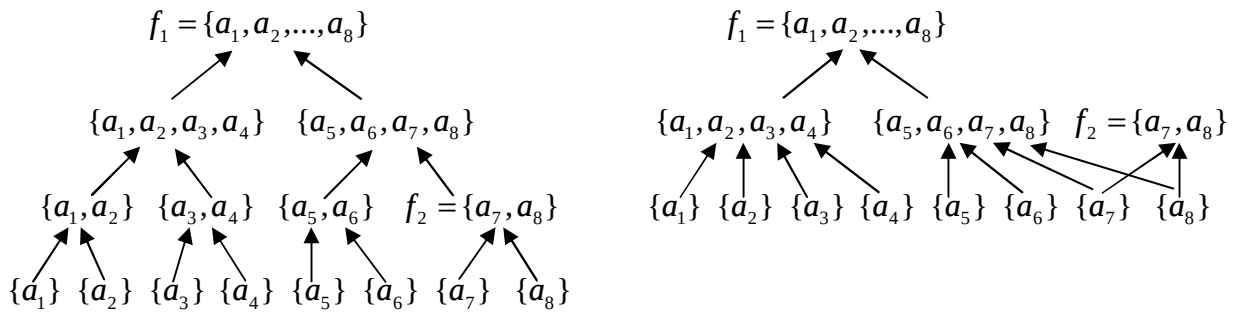


Рис. 5.1. Граф $G\in O(\{f_1, f_2\})$ организации набора групп $\{f_1, f_2\}$ и его 2-усечение G_2 .

На рис. 5.2 приведен еще один пример 2-усечения графа $G\in O(\{f_1, f_2\})$. Выполнено $L_G(\{a_3, a_4\})=2$. Удаляем группу $\{a_3, a_4\}$. Она использовалась при организации групп $f_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $\{a_3, a_4, a_5\}$. Соответственно, добавляем ребра $(\{a_3\}, f_1)$ и $(\{a_4\}, f_1)$ для организации группы f_1 (группа $\{a_1, a_2\}$ и ребро $(\{a_1, a_2\}, f_1)$ остаются без изменений). Группа $\{a_3, a_4, a_5\}$ в G_2 организована из входящих в нее элементарных групп.

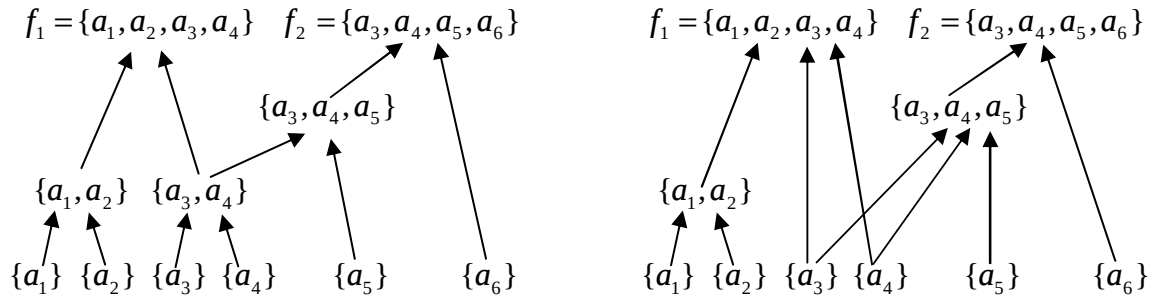


Рис. 5.2. Граф $G \in O(\{f_1, f_2\})$ организации набора групп $\{f_1, f_2\}$ и его 2-усечение G_2 .

Итак, для любого графа $G \in O(f)$ определение 5.15 дает ряд графов $G_1, G_2, \mathbf{K}, G_{L(G)} \in O(f)$, первый из которых представляет собой “простейшую” веерную организацию, последний совпадает с графом G . То есть в графах $G_1, G_2, \mathbf{K}, G_{L(G)}$ последовательно “появляются” новые уровни управляющих (неначальных) вершин до тех пор, пока не будет получена исходная организация G .

Определение 5.16. Для $l \geq 1$ l -управлением структурой Ψ_l назовем простейшее управление (см. опр. 5.9), которое в каждый момент времени $t = \overline{1, T}$ имеет вид $\Psi_l^t(\mathbf{f}^t) = G_l^t$, где $G_l^t \in O(\mathbf{f}^t)$ – l -усечение оптимальной на $O(\mathbf{f}^t)$ организации $G_*^t \in O(\mathbf{f}^t)$ набора групп $\mathbf{f}^t$, то есть организации, минимизирующей функционал P : $G_*^t = \arg \min_{G \in O(\mathbf{f}^t)} P(G)$.

В каждый момент времени 1-управление Ψ_1 определяет веерную организацию заданного внешней средой набора групп. Если в группах наборов $\mathbf{f}^{t-1}$ и $\mathbf{f}^t$ нет ни одного общего элемента (группы отличаются “максимально сильно”), то переход от структуры G^{t-1} к G^t сопровождается деорганизацией G^{t-1} и организацией G^t “с нуля”. По утверждению 5.4 для веерной организации стоимость деорганизации и организации “с нуля” минимальна. То есть в случае максимальных изменений наборов организуемых групп управление Ψ_1 минимизирует затраты на реорганизацию (вторую часть результата $r(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi_1)$).

При достаточно большом $l = l_{\max}$ управление $\Psi_{l_{\max}}$ определяет оптимальную (в статике) организацию заданного внешней средой набора групп. То есть управление $\Psi_{l_{\max}}$

минимизирует суммарные затраты на функционирование системы (первую часть результата $P(\mathbf{f}^1, \mathbf{K}\mathbf{f}^T, \Psi_{l_{\max}})$).

Итак, при минимальном и максимальном l получаем в некотором смысле противоположные управления, которые соответствуют минимуму и максимуму уровней иерархии.

Если стоимость реорганизации r нулевая, то оптимально управление $\Psi_{l_{\max}}$, если функционал P нулевой, то при максимальных изменениях наборов групп оптимально управление Ψ_1 . В общем случае оптимально¹ некоторое “промежуточное” управление Ψ_l , $1 < l < l_{\max}$, при котором структуры содержат l уровней иерархии. Таким образом, построен набор простейших управлений.

§3. Исследование модели управления структурными изменениями.

В данном параграфе проводится численное сравнение результатов l -управлений Ψ_l и находится оптимальное управление Ψ_{lopt} .

В главе IV разработаны алгоритмы поиска оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации произвольного набора групп. Для существенно выпуклых функционалов они дают также и оптимальную на $O(\mathbf{f})$ организацию (см. теор. 1.8). В этом случае применяем вышеуказанные алгоритмы для вычисления l -управлений Ψ_l . Аналогичным образом поступаем и в случае не существенно выпуклого функционала, используя оптимальную на $O_p(\mathbf{f}^t)$ организацию для вычисления l -управления вместо организации, оптимальной на $O(\mathbf{f}^t)$, и комментируя полученные результаты соответствующим образом.

¹ Имеется ввиду оптимальное среди всех l -управлений.

1. Параметры динамики внешней среды.

Для моделирования рассмотрим следующий пример. Количество исполнителей (элементов) $n = 30$, соответственно множество исполнителей $N = \{a_1, \mathbf{K}, a_{30}\}$. Определим тридцать групп $f_1 = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \mathbf{K}, a_{13}\}, \dots, f_{30} = \{a_{30}, a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{11}\}$. Группы $f_1, \mathbf{K}, f_{30}$ имеют мощность 12. Группа f_{i+1} отличается от группы f_i тем, что в нее добавлен один исполнитель, а один наоборот убран.

Определим наборы групп $\mathbf{f}_1 = \{f_1, \mathbf{K}, f_{10}\}$, $\mathbf{f}_2 = \{f_2, \mathbf{K}, f_{11}\}$, $\dots, \mathbf{f}_{30} = \{f_{30}, f_1, \mathbf{K}, f_9\}$. То есть $\mathbf{f}_1$ включает группы с первой по десятую, $\mathbf{f}_2$ – со второй по одиннадцатую, и т. д. Рассмотрим организационную систему на протяжении тридцати единиц времени, $T = 30$. Введем параметр скорости изменения внешней среды $0 \leq s \leq 1$. Тогда в качестве набора групп, организуемых в момент времени t , определим следующий набор $\mathbf{f}^t = \mathbf{f}_{1+\lfloor s(t-1) \rfloor}$, $t = \overline{1, T}$.

При максимальной скорости $s = 1$ выполнено $\mathbf{f}^1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}^2 = \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}^{30} = \mathbf{f}_{30}$, то есть внешней средой последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1, \mathbf{K}, \mathbf{f}_{30}$. При $s = 0.5$ последовательно определяются наборы $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2, \mathbf{K}, \mathbf{f}_{15}, \mathbf{f}_{15}$. То есть содержательно s – количество новых групп, появляющихся в наборе в течение единицы времени, и количество старых групп, которые удаляются из набора в течение единицы времени. Причем максимальной скоростью изменения мы считаем появление и удаление одной группы по истечению каждой единицы времени. При меньших скоростях в конце некоторых единиц времени организуемый набор не меняется, в конце остальных появляется и удаляется по одной группе.

Характер изложенных далее результатов вычислений не меняется, если вместо наборов $\mathbf{f}_1, \mathbf{K}, \mathbf{f}_{30}$ рассмотреть случайные наборы из 10 случайных групп мощности 12 (распределение равномерное, то есть вероятность появления всех групп одинакова). Общие тенденции останутся теми же. Таким образом, вместо оптимального управления, рассматриваемого ниже, можно вычислять оптимальное в среднем управление с сохранением характера результатов. Величины 10 и 12 определялись

требованием достаточно быстрого поиска оптимальной последовательной организации.

Расчеты проводились при скоростях изменения внешней среды $s = 0,04; 0,07; 0,1; 0,2; \mathbf{K}; 1,0$. При минимальной скорости набор организуемых групп меняется один раз на протяжении рассматриваемого промежутка времени $t = \overline{1, T}$. При максимальной скорости – тридцать раз.

В рассматриваемом примере уровень любой последовательной организации из $O_p(\mathbf{f}^t)$ равен 11, так как мощности всех организуемых (терминальных) групп равны 12. То есть для оптимальной последовательной организации $G_*^t \in O_p(\mathbf{f}^t)$ выполнено $L(G_*^t) = 11$. При $l = l_{\max} = 11$ l -усечение G_l^t организации G_*^t совпадает с G_*^t . В результате получаем ряд управлений $\Psi_1, \Psi_2, \mathbf{K}, \Psi_{11}$, при которых структура организации имеет соответственно от одного до одиннадцати “управляющих” иерархических уровней.

Таким образом, в данном пункте описана динамика внешней среды. Ниже считаем ее заданной, обозначая через $R(\Psi_l)$ результат l -управления, через $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ – соответственно первую и вторую его части (см. опр. 5.10).

2. Параметры затрат на функционирование и реорганизацию.

Как было отмечено во введении к данной главе, считаем, что затраты на функционирование (первая часть результата управления структурой, см. опр. 5.10) определяются функционалом стоимости P .

Проведем расчеты на примере функционала (I) (см. §2 гл. II), который имеет вид:

$$P(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k)) = [C(g_1) + \mathbf{K} + C(g_k) - \max(C(g_1), \mathbf{K}, C(g_k))]^b,$$
 где $b \in (0; +\infty)$ – параметр функционала. Считаем, что функция сложности имеет вид $C(g) = (\sum_{a \in g} C(a)^{1/a})^a$, где $a \in (0, +\infty)$ – параметр сложности, а $C(a) \geq 0$ – заданные сложности исполнителей (элементов) $a \in N$. Положим $C(a) = 1$ для любого

$a \in N$ (всех исполнителей считаем однородными, то есть имеющими одинаковую сложность).

В последовательной организации любая неэлементарная группа g организуется из подгруппы h и элементарной подгруппы $\{a\}$. Стоимость такой организации $P(C(h), C(\{a\})) = [C(h) + C(\{a\}) - \max(C(h), C(\{a\}))]^b = 1$ в силу $C(h) \geq 1 = C(a)$. При l -усечении последовательной организации некоторые неэлементарные группы $g = \{a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_k}\}$ могут организовываться непосредственно из входящих в них элементарных подгрупп $\{a_{i_1}\}, \mathbf{K}, \{a_{i_k}\}$. Стоимость такой организации $P(C(\{a_{i_1}\}), \mathbf{K}, C(\{a_{i_k}\})) = (k-1)^b$.

Как отмечено в начале параграфа, при моделировании анализируются только оптимальные последовательные организации и их l -усечения. Следовательно, параметр сложности a никак не влияет на стоимость анализируемых организаций. Положим $a = 1$. Ниже будем анализировать результаты при изменении параметра функционала b от 0.25 до 2. Изменение b влияет только на стоимость усечений и не изменяет стоимости последовательной организации. Напомним, что при $b \leq 1$ функционал (I) – вогнутый, при $b \geq 1$ – существенно выпуклый (см. утв. 2.6), то есть при $b \geq 1$ найденная алгоритмом оптимальная последовательная организация будет оптимальна на $O(\mathbf{f}^t)$, при $b < 1$ – вообще говоря нет.

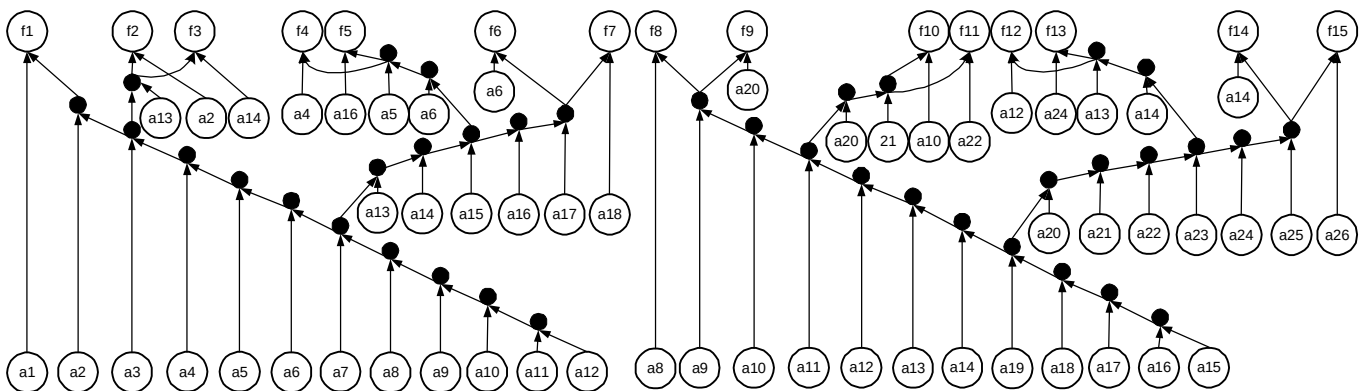


Рис. 5.3. Схема оптимальной последовательной организации групп $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$ для функционала (I).

На рис. 5.3 приведен пример оптимальной на $O_p(\mathbf{f})$ последовательной организации набора групп $\mathbf{f} = \{f_1, \mathbf{K}, f_{15}\}$

($f_1 = \{a_1, a_2, \mathbf{K}, a_{12}\}$, $f_2 = \{a_2, a_3, \mathbf{K}, a_{13}\}, \dots, f_{15} = \{a_{15}, a_{16}, \mathbf{K}, a_{26}\}$). При $b \geq 1$ ¹ изображенная организация оптимальна также и на $O(\mathbf{f})$ в силу существенной выпуклости. Элементарные группы повторены несколько раз, так как иначе рисунок становится весьма громоздким. То есть рисунок представляет собой схему оптимальной последовательной организации.

Их рис. 5.3 видна последовательность организации элементов в каждой из групп $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$. При последовательной организации группы f_i , $i = \overline{1, 15}$ необходимо организовать 10 промежуточных групп. Если все группы $f_1, \mathbf{K}, f_{15}$ организовывать независимо, то потребуется 150 промежуточных групп. Однако некоторые промежуточные группы могут быть использованы несколько раз. За счет этого в найденной алгоритмом оптимальной организации содержится только 38 промежуточных групп, что снижает стоимость организации более, чем в три раза. Группы $f_1, \mathbf{K}, f_7$ и $f_8, \mathbf{K}, f_{15}$ организуются без использования общих промежуточных подгрупп (левая и правая части графа имеют только общие начальные вершины).

Стоимость реорганизации структуры определяется величинами $r'(a)$ и $r''(a)$ – стоимостями включения исполнителя (элемента) $a \in N$ в группу и исключения a из группы. Всех исполнителей считаем однородными и симметричными по отношению к включению в группу и исключению из нее. То есть для всех $a \in N$ положим $r'(a) = r''(a) = r$, где $r > 0$ – некоторая величина, определяющая масштаб стоимости реорганизации по отношению к стоимости функционирования (они должны быть соизмеримы).

Напомним (см. опр. 5.10), что результат управления структурой имеет вид $R(\Psi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1, \overline{T}} [P(G^t) + r(G^{t-1}, G^t)]$. При достаточно большом r (достаточно высокой стоимости реорганизации) первое слагаемое становится несущественным. Как было отмечено в пункте 4 §2, в этом случае при достаточной скорости изменения внешней среды оптимальным среди l -управлений

¹ Как отмечено выше, стоимость последовательных организаций не зависит от параметров a и b . То есть организация, изображенная на рисунке, оптимальна на $O_p(\mathbf{f})$ при любых a и b .

становится управление Ψ_1 , определяющее веерную структуру, стоимость организации и деорганизации которой минимальна (см. утв. 5.4). Наибольшая скорость изменения внешней среды $s=1$ (см. п.1). Эмпирически установлено, что при $r(\emptyset, G_{\text{веер}}) = 2P(G_{\text{веер}})$ ($G_{\text{веер}} \in O(f^t)$ – веерная организация) в рассматриваемом примере значение $s=1$ действительно приводит к оптимальности управления Ψ_1 , а меньшие значения s приводят к оптимальности $\Psi_{l_{\text{opt}}}$ при $l_{\text{opt}} > 1$. То есть полагаем, что стоимость создания “с нуля” наиболее простой веерной организации в два раза превосходит затраты на ее функционирование в течение единицы времени.

Выразим величину r . Напомним, что набор f^t состоит из 10 групп, мощность каждой из которых равна 12 (см. п.1). Следовательно, $P(G_{\text{веер}}) = 10 \cdot 11^b$. Стоимость создания $G_{\text{веер}}$ “с нуля” равна сумме стоимостей создания “с нуля” каждой из групп набора f^t . То есть $r(\emptyset, G_{\text{веер}}) = 10 \cdot 12 \cdot r$. Таким образом, имеем $r = 11^b / 6$. Данное соотношение, вытекающее из равенства $r(\emptyset, G_{\text{веер}}) = 2P(G_{\text{веер}})$, и будем понимать под “соизмеримостью” затрат на функционирование и на реорганизацию.

Таким образом, все параметры модели, кроме s и b , строго описаны и зафиксированы. Ниже анализируются структурные изменения при различных s и b .

3. Соотношение затрат на функционирование и реорганизацию при различном количестве уровней иерархии.

Зафиксируем $b=1$ и проанализируем поведение первой и второй части затрат $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ при различных l -управлениях, $l = \overline{1,11}$.

Очевидно, что $P(\Psi_l)$ не зависит от скорости s изменения внешней среды, так как для всех $t = \overline{1, T}$ организуемый набор групп f^t состоит из десяти групп мощности двенадцать с одинаковой структурой пересечений (см. п.1), все исполнители однородны.

Таким образом, кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l никак не меняется при изменении s . Она изображена на рис. 5.4 толстой линией.

Кривая зависимости $r(\Psi_l)$ от l существенно трансформируется при изменении s . На рис. 5.4 приведены кривые для значений $s = 0,04; 0,07; 0,1; 0,2; \mathbf{K}; 1,0$. При $s = 0,04$ затраты на реорганизацию $r(\Psi_l)$ минимальны (нижняя кривая). При увеличении s кривая $r(\Psi_l)$ “поднимается” вверх и переходит в следующую кривую. Таким образом, тонкие расположенные друг над другом линии на рис. 5.4 соответствуют значениям s от 0,04 до 1.

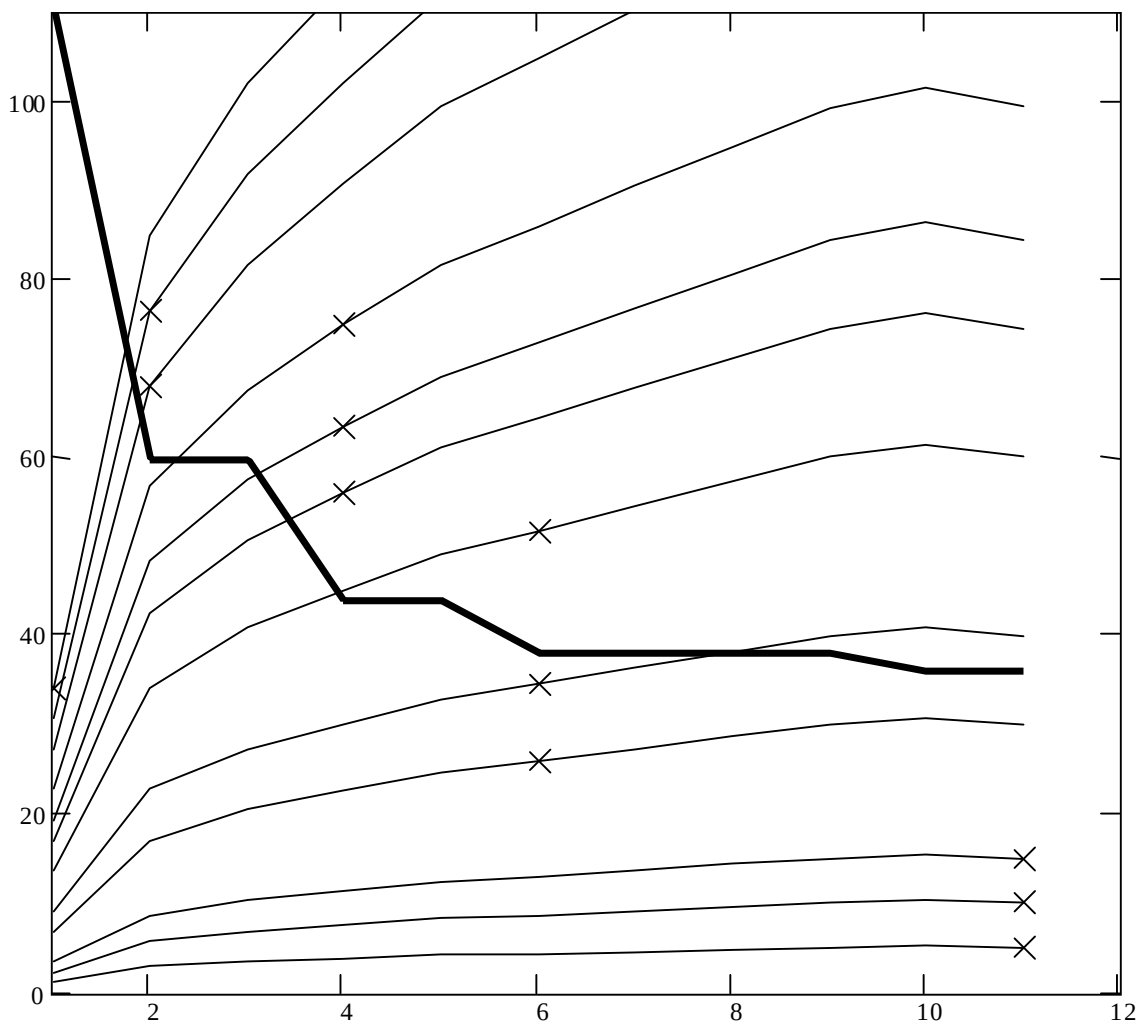


Рис. 5.4. Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l при различных s (тонкие линии) и кривая зависимости $P(\Psi_l)$ от l (толстая линия) при $b = 1$.

Из рис. 5.4 видно, что стоимость реорганизации возрастает при “усложнении” структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии, за исключением случая максимального $l = 11$. Величина $r(\Psi_{11})$ немного меньше, чем $r(\Psi_{10})$, то есть

наблюдается некоторый “краевой эффект” при приближении количества уровней иерархии к критическому, то есть к максимально возможному.

Общий характер кривых $r(\Psi_l)$ позволяет заключить, что в рассмотренном примере они вогнуты. Максимальный рост затрат на перестроение наблюдается при увеличении l от 1 до 2, то есть при переходе от наиболее простой (веерной) организации к организации, которая имеет два уровня управления. При дальнейшем увеличении l рост затрат на перестроение замедляется.

Из рис. 5.4 видно, что затраты на функционирование $P(\Psi_l)$ уменьшаются при усложнении структуры, то есть при увеличении количества уровней иерархии. Таким образом, в статике минимум затрат (максимум “эффективности”) достигается для последовательной организации с максимальным количеством уровней иерархии.

Общий характер кривой $P(\Psi_l)$ позволяет заключить, что в рассмотренном примере она выпукла. Максимальное уменьшение затрат на функционирование наблюдается при увеличении l от 1 до 2, то есть при переходе от наиболее простой (веерной) организации к организации, которая имеет два уровня управления. При дальнейшем увеличении l падение затрат на функционирование замедляется.

Таким образом, кривые $P(\Psi_l)$ и $r(\Psi_l)$ ведут себя в некотором смысле противоположным образом при увеличении количества уровней иерархии.

Для поиска оптимального управления структурой необходимо выбрать $l = lopt$, для которого результат $R(\Psi_l) = P(\Psi_l) + r(\Psi_l)$ минимален. Значение $lopt$ на каждой кривой $r(\Psi_l)$ обозначено крестиком. При возрастании l от 1 до $lopt$ возрастание $r(\Psi_l)$ компенсируется убыванием $P(\Psi_l)$, после $lopt$ – уже нет.

Увеличение скорости изменения внешней среды s соответствует переходу с более низких кривых $r(\Psi_l)$ на более высокие. Такой переход сопровождается убыванием $lopt$ от 11 до 1 (перемещением крестика справа налево). Перейдя к соответствующим координатам, получим приведенную на рис. 5.5

зависимость оптимального числа $lopt$ уровней иерархии от скорости изменения внешней среды (интенсивности внешних воздействий). Гиперболическое приближение (оптимальная по a и b в смысле среднеквадратичного отклонения кривая $lopt(s) = a + b/s$) достаточно наглядно аппроксимирует полученную эмпирическую зависимость и также приведено на рис. 5.5.

Из рис. 5.5 можно сделать следующий вывод: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую (веерную) структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий (увеличивая число уровней иерархии). Качественно это соответствует тому, что в нестабильной внешней среде могут “выживать” лишь организационные системы с максимально простой структурой за счет приспособляемости, в стабильной же среде наоборот доминируют системы со сложной иерархической структурой за счет высокой эффективности.

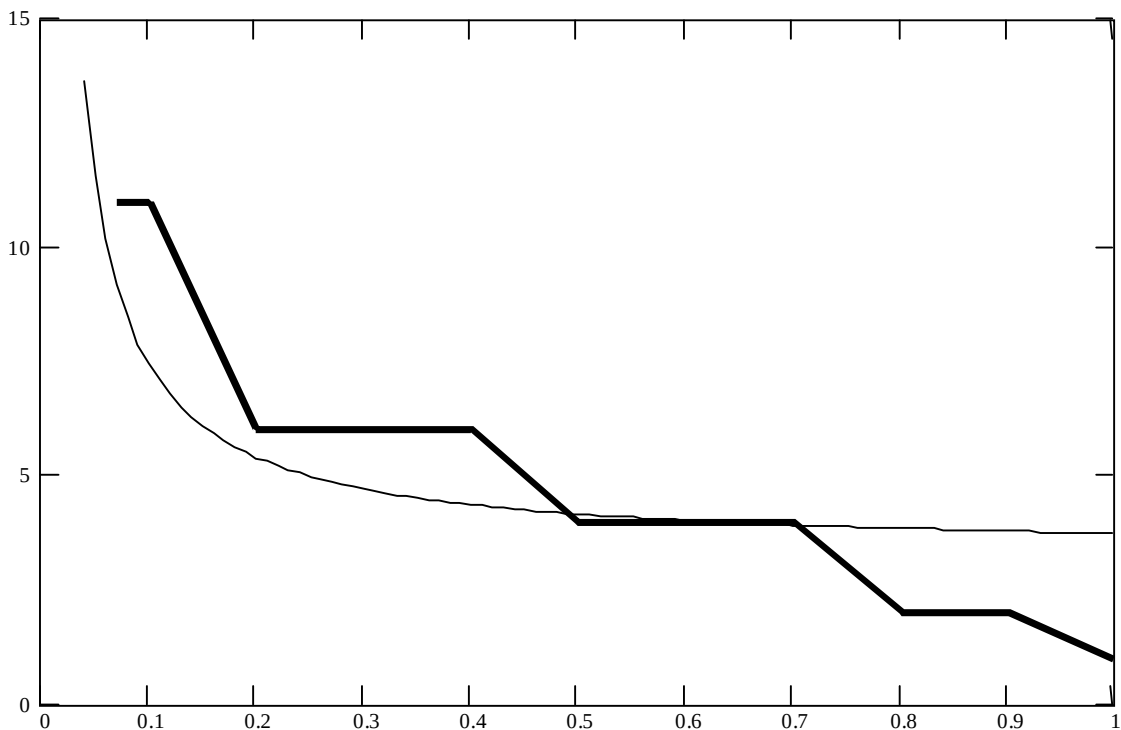


Рис. 5.5. Кривая зависимости $lopt$ от s при $0 < s \leq 1$ (толстая линия) и ее оптимальное гиперболическое приближение $lopt(s) = a + b/s$ (тонкая линия) при $b = 1$.

4. Оптимальное количество уровней иерархии при различных параметрах функционала и скоростях изменения внешней среды.

Кривые зависимости $r(\Psi_l)$ от l , приведенные на рис. 5.4, при изменении b умножаются на постоянный коэффициент в силу изменения r (чтобы затраты на функционирование и на реорганизацию оставались соизмеримыми, см. п.2), но характер кривых и взаимное расположения остаются неизменными. Кривая же зависимости $P(\Psi_l)$ от l при изменении b существенно трансформируется. Проанализируем ее поведение и, как следствие, изменение оптимального управления структурой.

На рис. 5.6 приведены кривые зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 0,25; 0,5; 0,75; 0,95; 1$. Они представляют собой расположенные друг над другом линии. Нижняя линия соответствует $b = 0,25$, верхняя – $b = 1$.

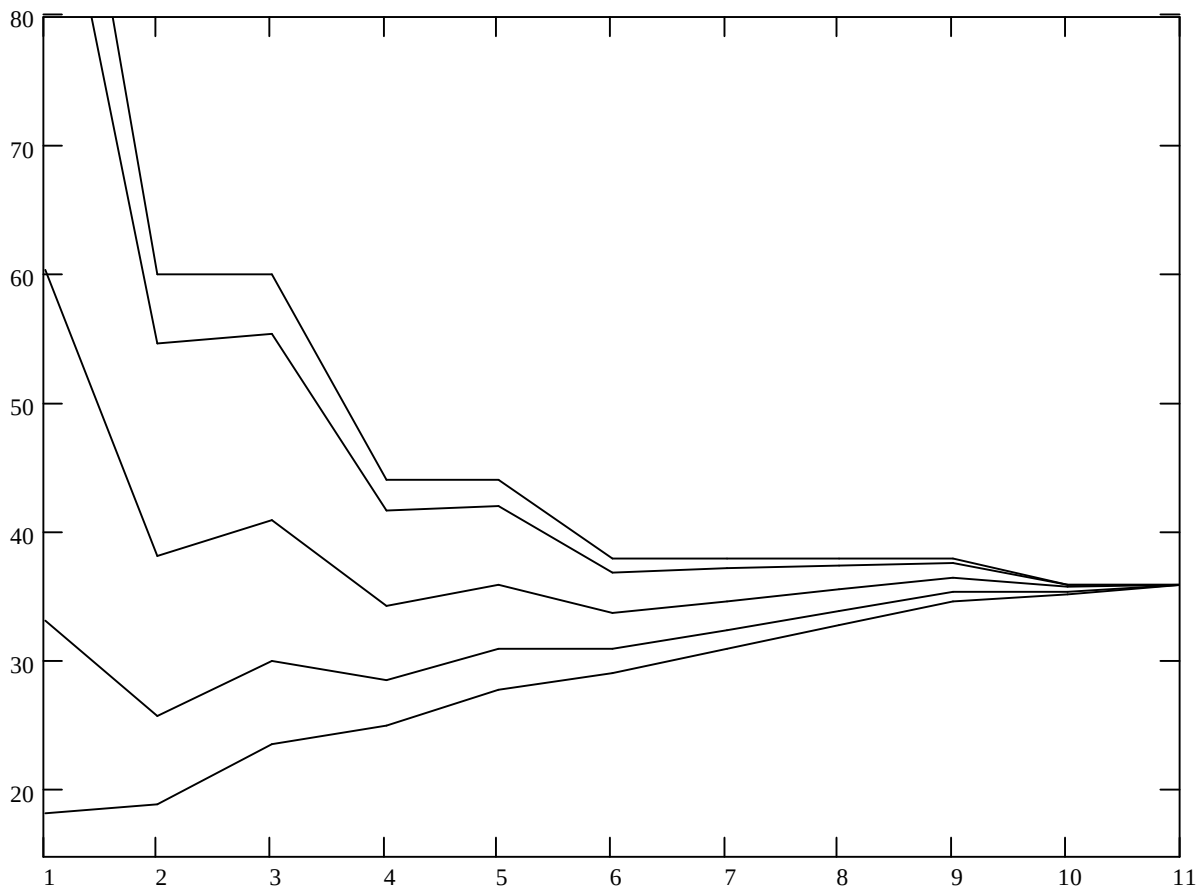


Рис. 5.6. Кривые зависимости $P(\Psi_l)$ от l при различных $0,25 \leq b \leq 1$.

Стоимость последовательной организации одинакова для любого b (см. п.2). Поэтому при приближении к “критической точке” (максимально возможному количеству уровней иерархии) все кривые сходятся в одну точку (рис. 5.6 справа).

При $b < 1$ функционал (I) вогнут. То есть последовательная организация, вообще говоря, неоптимальна даже в статике.

При минимальном $b = 0,25$ вогнутость “ярко выражена”: минимальна стоимость функционирования веерной организации, даже несмотря на то, что группы набора весьма существенно пересекаются (создание промежуточных групп не оправдано). Таким образом, кривая $P(\Psi_l)$ возрастает при увеличении количества уровней иерархии l от 1 до 11 (см. рис. 5.6 нижняя линия). Так как $l=1$ доставляет также минимум второй части результата управления $r(\Psi_l)$ (см. рис. 5.4), то в этом случае $l_{opt} = 1$ при любой скорости изменения внешней среды.

При $b = 0,5$ введение промежуточного уровня иерархии уже дает выигрыш (промежуточные группы используются для организации нескольких групп набора f^t). Таким образом, минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 2$. Аналогично, при $b = 0,75$ минимум $P(\Psi_l)$ достигается при $l = 6$, при $b = 0,95$ – при $l = 10$ (см. рис. 5.6).

При $b \geq 1$ в статике оптимальна последовательная организация. То есть минимум $P(\Psi_l)$ достигается в “критической точке” $l=11$. На рис. 5.6 верхняя кривая соответствует зависимости $P(\Psi_l)$ от l при $b = 1$. При дальнейшем увеличении b кривая $P(\Psi_l)$ более “круто” возрастает при приближении l к 1, сохраняя свой монотонный характер.

В таблице 5.1 приведены значения l_{opt} в зависимости от s и b . В связи с их целочисленностью соответствующие кривые зависимости l_{opt} от s , изображенные на рис. 5.7, имеют достаточно много общих участков. Чтобы не загромождать рисунок, приведены только четыре кривые при $b = 0,25; 0,5; 0,95; 2$.

$s \backslash b$	0,25	0,50	0,75	0,95	1,00	2,00
0,04	1	2	6	11	11	11
0,07	1	2	6	6	11	11
0,1	1	2	4	6	11	11
0,2	1	2	4	6	6	11
0,3	1	2	4	6	6	6
0,4	1	2	2	4	6	6
0,5	1	2	2	4	4	6
0,6	1	2	2	2	4	4
0,7	1	2	2	2	4	4
0,8	1	2	2	2	2	2
0,9	1	1	2	2	2	2
1,0	1	1	1	1	1	1

Таблица 5.1. Значения $lopt$ в зависимости от s и b .

Более наглядную картину дают оптимальные гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ от s , то есть гиперболы вида $lopt(s) = a + b/s$, в которых коэффициенты a и b подобраны так, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение кривой от данных таблицы 5.1. При $b = 0,25; 0,5; 0,75; 0,95; 1; 2$ гиперболические приближения изображены на рис. 5.8. Значение $b = 0,25$ соответствует нижней линии, значение $b = 2$ – верхней линии.

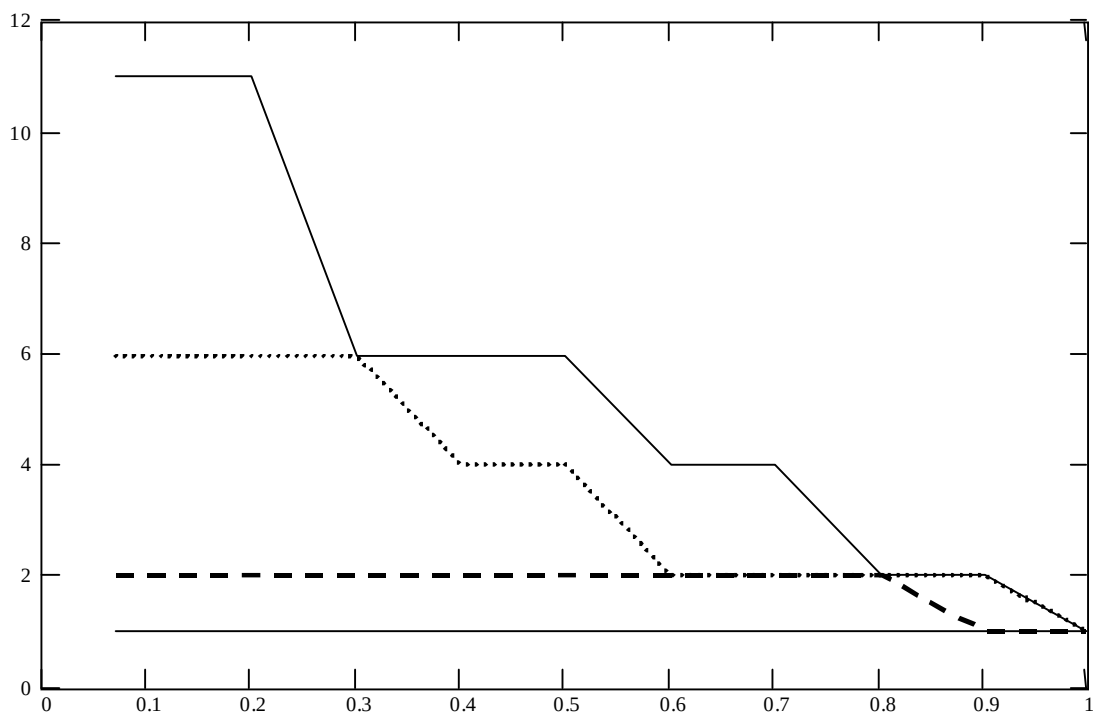


Рис. 5.7. Кривые зависимости $lopt$ от s при $b = 0,25; 0,5; 0,95; 2$.

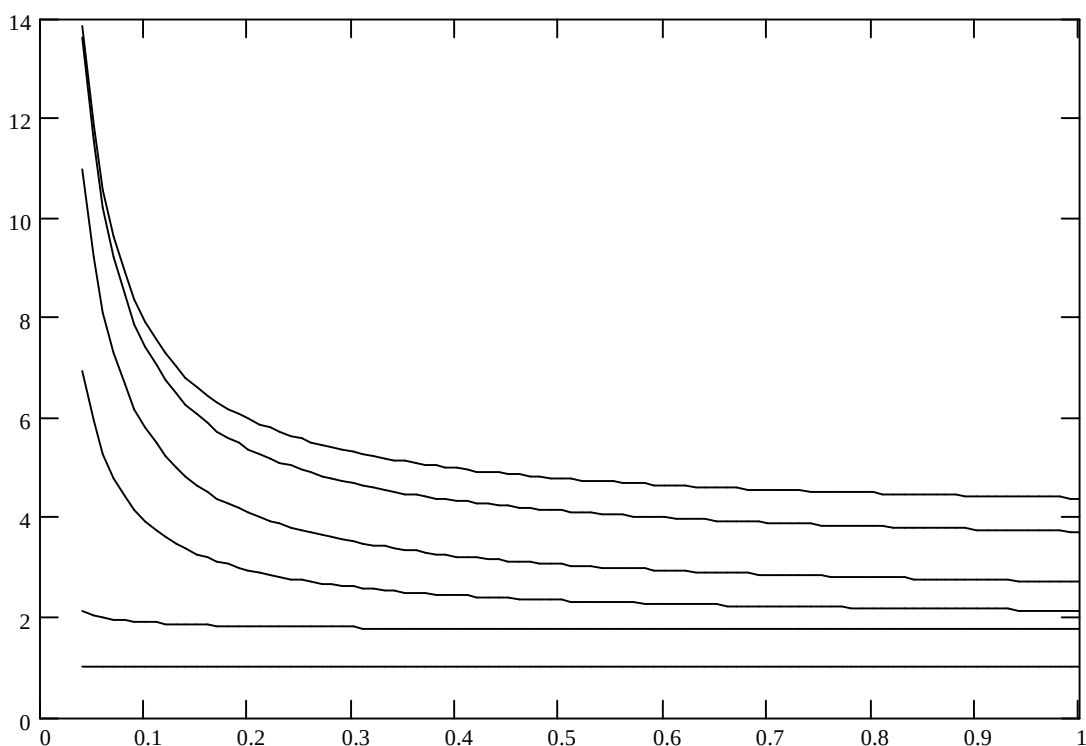


Рис. 5.8. Гиперболические приближения кривых зависимости $lopt$ от s при $0 < s \leq 1$ и различных $b = 0,25; 0,5; 0,75; 0,95; 1; 2$.

При “ярко выраженной” вогнутости функционала ($b = 0,25$) “сложная” организация с несколькими уровнями иерархии в принципе не выгодна, даже при постоянной внешней среде. Содержательно это можно интерпретировать, например, следующим образом. Уровень развития “организационных отношений” в системе таков, что наиболее эффективна “стихийная” организацию исполнителей для выполнения каждой конкретной работы под руководством одного “управляющего звена” (веерная организация).

При ослаблении вогнутости ($b = 0,5$) “в статике” становится выгодным введение двух уровней управления, при которых минимизируется первая часть результата $P(\Psi_l)$ (см. рис. 5.6). При $s < 0,9$ выполнено $lopt = 2$, то есть такая структура управления оптимальна и в динамике (см. таблицу 5.1). При максимальной скорости изменения внешней среды оптимальна веерная организация.

При дальнейшем ослаблении вогнутости ($b = 0,75$) в достаточно стабильной ситуации ($s \leq 0,3$) становятся выгодными более сложные структуры управления (см. таблицу 5.1). Здесь “эффект” от координации взаимодействия исполнителей

промежуточными звеньями уже превосходит “дороговизну” функционирования самих промежуточных звеньев.

Стоимость функционирования промежуточных звеньев уменьшается (относительно общего результата) при дальнейшем увеличении b ($b = 0,95$), что при стабильной внешней среде делает выгодной уже последовательную организацию с максимальным количеством уровней иерархии (см. таблицу 5.1).

При $b \geq 1$ стоимость функционирования P становится существенно выпуклой, и организация с максимальным количеством уровней иерархии будет оптимальной не только при минимальных изменениях внешней среды, но и при больших s (см. таблицу 5.1). То есть по мере “усиления выпуклости” возрастает “сопротивляемость” организации внешним изменениям и упрощение (“деградация”) происходит при более сильных внешних изменениях (см. рис. 5.7, 5.8 и таблицу 5.1). Содержательно это можно интерпретировать, например, следующим образом. Уровень развития “организационных отношений” в системе достаточно высок, чтобы успешно противостоять нестабильности внешней среды за счет высокой эффективности системы управления, не допуская упрощения (“деградации”) организации.

В заключение главы кратко охарактеризуем полученные результаты. Построенная в §1 метрика на множестве графов организации также определена на произвольных ориентированных графах. Но для графов, отличных от графов организации, необходима содержательная интерпретация метрики. Разумеется, введенная метрика (стоимость реорганизации) не исчерпывает все возможные варианты метрики на множестве структур.

В §2 введено понятие внешней среды, которая в каждый момент определяет, какой набор групп должен быть организован. Под структурой понимается граф организации заданного внешней средой набора групп. Управление структурой определено как произвольное отображение текущей структуры и известной информации об изменении внешней среды в новую структуру (структуру на следующем шаге). Результат управления – суммарные затраты на функционирование (функционал стоимости) и на реорганизацию (в смысле метрики §1) – минимален при оптимальном управлении. Введенное понятие

оптимального управления структурой остается неизменным при замене стоимости реорганизации любой другой метрикой. Таким образом, оптимальное управление определено достаточно общо. Далее введен ряд простейших управлений, которые названы l -усечениями, где l – количество уровней иерархии в структуре, определяемой соответствующим управлением.

В §3 приводится пример расчетов оптимального l -управления на одном из примеров функционала. Анализируется зависимость оптимального управления от параметра функционала (степени развития “организационных отношений”) и скорости изменения внешней среды, определенной как число вновь появляющихся групп в единицу времени. Результаты расчетов показывают, что построенная модель структурных изменений “улавливает” некоторые тенденции, наблюдаемые “на практике”. Этот факт позволяет надеяться, что в дальнейшем разработанный аппарат оптимизации иерархических структур может быть использован при моделировании структуры реальных организационных систем.

Заключение.

Подводя итоги книги, кратко изложим основные результаты и выводы. Поставленная в начале работы общая задача поиска структуры (ориентированного ациклического графа), оптимальной в смысле произвольного критерия, для структурного функционала сведена к задаче на множестве графов организации (см. §2 гл. I). В §1 главы I требование структурности анализируется с содержательной точки зрения. Далее рассмотрена задача на множествах графов организации заданного набора групп. Доказана оптимальность дерева для монотонного функционала стоимости, 2-организации – для выпуклого функционала, веерной организации – для вогнутого функционала, последовательной организации – для существенно выпуклого функционала (см. §3 гл. I).

В главе II различные частные задачи: оптимальная организация технологического взаимодействия элементов, построение оптимального алфавитного кода, построение оптимальной структуры управления сетью доставки материальных потоков и др. сформулированы в терминах задачи оптимизации иерархической структуры. Предложены методы поиска оптимальной структуры организационной системы для ряда функционалов затрат на ее управление. Примеры функционалов предложены исходя из количественного описания стоимости организации взаимодействия людей в группе, которое на качественном уровне рассмотрено в различных работах по менеджменту. Полученные результаты схематично представлены на рис. 2.5-2.8. Видно, что в зависимости от параметров функционала оптимальны организации различного вида. В некоторых областях оптимальна 2-организация с максимальным числом управляющих центров (функционал – выпуклый), в других, напротив, оптимальна веерная организация одной группы – один управляющий центр (функционал – вогнутый). В некоторых областях свойство выпуклости усиливается и оптимальна последовательная организация – частный случай 2-организации (функционал – существенно выпуклый). Наиболее интересными с содержательной точки зрения являются области параметров, в которых функционалы не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми (белые области на рис. 2.6-2.8). Найденные алгоритмами главы III деревья подтверждают сложность

поведения оптимальной организации в этих областях (в частности, позволяют выдвинуть гипотезу существования областей оптимальности r -организации для любого $r \geq 2$). По-видимому, в данных областях функционалы могут описывать структуру реальных организационных систем.

В главах III и IV для структурного функционала общего вида доказано отсутствие полиномиальных алгоритмов поиска оптимального дерева организации одной группы и поиска оптимальной последовательной организации произвольного набора групп, построены алгоритмы экспоненциальной сложности. Для одного класса функционалов построены полиномиальные алгоритмы. Предложены эвристические алгоритмы, проведено тестирование их точности. Данные главы по отношению к исследуемой задаче оптимизации структуры носят инструментальный характер, то есть позволяют создавать программы поиска оптимальных структур. Результаты работы упомянутых программ часто оказываются полезными при доказательстве аналитических результатов по поводу вида оптимальной структуры для исследуемого функционала.

В главе V построена динамическая модель структурных изменений организационной системы в ответ на изменения внешней среды. Предложена методика численного поиска управления, минимизирующего суммарные затраты на функционирование (функционал стоимости) и реструктуризацию (заданную метрику на множестве структур). Определены зависимости оптимального числа уровней иерархии от скорости изменения внешней среды и параметра функционала.

Проведенные расчеты подтверждают наблюдаемую на практике закономерность: при жестких (интенсивных) внешних изменениях выгодно поддерживать простую (веерную) структуру системы, усложняя ее по мере смягчения внешних воздействий (увеличивая число уровней иерархии). Качественно это соответствует тому, что в нестабильной внешней среде могут “выживать” лишь организационные системы с максимально простой структурой за счет приспособляемости, в стабильной же среде, наоборот, доминируют системы со сложной иерархической структурой за счет высокой эффективности. Кроме того, по мере увеличения параметра функционала b (развития “организационных отношений”) увеличивается оптимальное количество

уровней иерархии (за счет высокой эффективности система успешно “противостоит” более сильным внешним изменениям, не допуская упрощения (“деградации”)).

В заключение приведем актуальные, на наш взгляд, направления дальнейших исследований.

1. Изучение бесконечных иерархий, неструктурных функционалов стоимости, множеств графов, отличных от рассмотренных в книге. Данное направление диктуется, во-первых, логикой математического исследования, а во-вторых, известными моделями иерархий с неструктурными функционалами (см. п.п. 4, 5 §2 гл. II).

2. Поиск аналитических условий оптимальности r -организации для $r > 2$ и структурного функционала, не являющегося ни выпуклым, ни вогнутым. В книге проанализированы в некотором смысле предельные случаи выпуклых и вогнутых функционалов, соответствующие максимуму и минимуму управляющих центров в оптимальной организации. По-видимому, большинство реальных организационных систем не описываются ни одним из этих крайних случаев, то есть им как раз соответствуют функционалы, не являющиеся ни выпуклыми, ни вогнутыми.

3. Исследование различных управлений структурными изменениями организационной системы (отличных от l -усечений). Включение задачи управления структурой в состав общей задачи управления организационной системой.

4. Исследование “непрерывных” процессов или “траекторий” структурных преобразований, в том числе процессов пошагового перехода к оптимальной структуре. Здесь появляется большое количество чисто динамических задач, например, выяснение условий, при которых локально оптимальные перестроения в подсистемах приводят к глобально оптимальной структуре. В таких динамических задачах ключевым является теоретико-игровое моделирование взаимодействия структурных элементов системы, каждый из которых оптимизирует свою целевую функцию, проводя локальное перестроение структуры по своей “инициативе”.

Литература.

1. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Петров С.В. и др. Динамические подходы к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики). Часть 1 // Автоматика и телемеханика. 1979. №7. С. 135–151.
2. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Петров С.В. и др. Динамические подходы к анализу структур, описываемых графами (основы графодинамики). Часть 2 // Автоматика и телемеханика. 1979. №9. С. 123–136.
3. Базилевич Л.А. Обоснование нормативов управляемости на модели трудоемкости руководства. – В кн.: Повышение эффективности управления объединениями и отраслями промышленности. Новосибирск, 1977.
4. Браверман Э.М., Дорофеюк А.А., Лумельянский В.Я. и др. Диагонализация матрицы связей и выявление скрытых факторов. – В кн.: Проблемы расширения возможностей автоматов. Вып. 1. М., 1971.
5. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
6. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
7. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
8. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем и задачи организационного управления / Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Москва: ИПУ РАН, 19–21 ноября 2001. Том 1. С. 12–16.
9. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999.
10. Власюк Б.А., Моросанов Н.С. Синтез иерархической структуры управления в больших системах // Автоматика и телемеханика. 1973. №3.
11. Воронин А.А. Устойчивое развитие – миф или реальность? // Математическое образование. 2000. №1(12). С. 59–67.
12. Воронин А.А., Мишин С.П. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // Автоматика и телемеханика. 2002. №5. С. 120–132.

13. Воронин А.А., Мишин С.П. Математическое моделирование устойчивого развития организационных систем / Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Москва: ИПУ РАН, 19–21 ноября 2001. Том 1. С. 28–29.
14. Воронин А.А., Мишин С.П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. 2001. Сер. 1: Математика. Физика. С. 93–113.
15. Воронин А.А., Мишин С.П. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // Автоматика и телемеханика. 2002. №8. С. 136–150.
16. Губко М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей // Автоматика и телемеханика. 2002. №12. С. 116–130.
17. Губко М.В., Мишин С.П. Оптимальная структура системы управления технологическими связями / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 27–29 ноября 2002. С. 50–54.
18. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.
19. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
20. Дедиков Э.А., Ершов С.Г. Определение критериев формирования структур обработки информации // Управляющие системы и машины. 1973. №1.
21. Дементьев В.Т., Ерзин А.И., Ларин Р.М. и др. Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1996.
22. Дорофеюк А.А. Алгоритмы автоматической классификации (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1971. №12.
23. Дружинин В.В., Конторов Д.С. Проблемы системологии. М.: Сов. радио, 1976.
24. Дубовский С.В., Уздемир А.П. Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики // Автоматика и телемеханика. 1974. №6.
25. Лейбкинд А.Р., Рудник Б.Л., Чухнов А.И. Математические методы синтеза организационных структур управления. Препринт. М., Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, 1978.

26. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.
27. Миркин Б.Г. Задача классификации (обзор). – В кн.: Сложные системы. Новосибирск, 1975.
28. Миркин Б.Г. Модели качественного анализа социально-экономической информации. – В кн.: Математика в социологии: моделирование и обработка информации. М., 1977.
29. Мишин С.П. Оптимальное управление структурой организационной системы / Сборник трудов международной научно-технической конференции «Современные сложные системы управления». Липецк, 12–14 марта 2002. С. 101–102.
30. Мишин С.П. Оптимизация иерархических структур / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 100–105.
31. Мишин С.П. Стоимость реорганизации структуры системы // Тр. кафедры математ. анализа и теории функций Волг. ун-та. 2002. С. 178–198.
32. Мишин С.П. Структура многоуровневой системы в изменяющейся внешней среде / Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Москва, 19–21 ноября 2001. Том 1. С. 54–55.
33. Наумчук О.Ф., Саввин Г.Г. Методы анализа сетей передачи и распределения информации. – В кн.: Сети передачи информации и их автоматизация. М., 1965.
34. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
35. Новиков Д.А. Типология задач управления организационными структурами / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 27–29 ноября 2002. С. 110–115.
36. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999.
37. Овсиевич Б.И. Модели формирования организационных структур. Л.: Наука, 1979.
38. Поваров Г.Н. О структурной теории сетей связи. – В кн.: Проблемы передачи информации. Вып. 1. М., 1959.
39. Рубинштейн М.И. Задачи синтеза иерархических систем управления. – В кн.: Согласованное управление. М., 1975.

40. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Иностранная литература, 1948.
41. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982.
42. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высш. Шк., 2001.
43. Bensoussan A., Hurst E.G., Näslund B. Management applications of modern control theory. Amsterdam–Oxford–New York, 1974.
44. Carzo R.J., Janouzas J.N. Effects of flat and tall organization structure. – *Administrat. Sci. Quart.*, 1969, vol. 14, no. 2.
45. Chapple E., Sayles L. The measure of management. N. Y., 1961.
46. Conrath D.W. Communications environment and its relationship to organizational structure. – *Manag. Sci.*, 1974, vol. 20, no. 4.
47. Davies G., Smith M., Twigger W. Leading people: a model of choice and fate for leadership development. *Leadership & organization development*, 1991, vol. 12, no. 1, pp. 7–11.
48. Huffman D.A. A method for the construction of minimum-redundancy codes. – *Proc. IRE*, 1952, no. 9, pp. 1098–1101.
49. Jago A.G., Vroom V.H. Perceptions of leadership style: superior and subordinate descriptions of decision-making behavior. In *Leadership Frontiers*, ed. Hunt J.G, Larson L.L. Carbondale: Southern Illinois university press, 1975, pp. 103–120.
50. Manz C.C., Sims H.P. Leading workers to lead themselves: the external leadership of self-managing work teams. – *Administrat. Sci. Quart.*, 1987, pp. 106–129.
51. McMillan B. Two inequalities implied by unique decipherability. – *IRE Trans.*, 1956. IT-2, no. 4, pp. 115–116.
52. Miller E.J. Technology, territory and time. – *Human Relations*, 1959, vol. 12.
53. Oldman G.R., Hackman J.R. Relationships between organization structure and employee reactions: comparing alternative frameworks. – *Administrat. Sci. Quart.*, 1981, pp. 66–83.
54. Peters T. Thriving on chaos. N. Y.: Knopf, 1987.
55. Senge P. The fifth discipline: the art and practice of the learning organization. N. Y.: Doubleday/Currency, 1990.
56. Worthy J.C. Organization structure and employee morale. – *Amer. Sociol. Rev.*, 1950, vol. 15, no. 1.